

## Optique – Contrôle continu 1 Interférences

Corrections

### 1 Interférences (4 pts)

On considère une source monochromatique  $S$  de longueur d'onde  $\lambda$ . L'onde lumineuse issue de  $S$  peut arriver en  $M$  en suivant deux chemins distincts  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  (voir figure 1). On suppose que l'amplitude envoyée sur chaque chemin est égale à  $\Psi_0/\sqrt{2}$ .

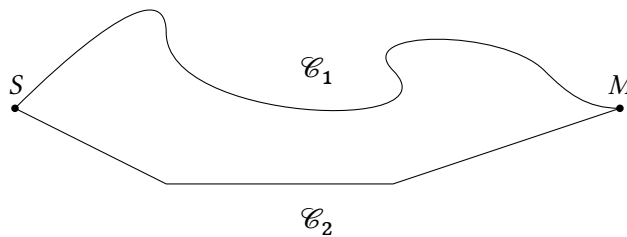


FIGURE 1 – Interférences à 2 ondes.

1 - 1

$$\Psi_1(M) = \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(SM)_1} \quad \Psi_2(M) = \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(SM)_2} \quad (1.0.1)$$

1 - 2

$$\Psi(M) = \Psi_1(M) + \Psi_2(M) = \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(SM)_1} + \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(SM)_2} \quad (1.0.2)$$

1 - 3

$$I(M) = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = \left( \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(SM)_1} + \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(SM)_2} \right) \times \left( \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SM)_1} + \frac{\Psi_0}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(SM)_2} \right) \quad (1.0.3)$$

$$= \frac{\Psi_0^2}{2} \left( 1 + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[(SM)_1 - (SM)_2]} + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}[(SM)_2 - (SM)_1]} + 1 \right) \quad (1.0.4)$$

$$= \frac{\Psi_0^2}{2} \left( 2 + 2 \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} [(SM)_1 - (SM)_2] \right) \right) \quad (1.0.5)$$

$$= \Psi_0^2 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right) \quad (1.0.6)$$

### 2 Film de savon (16,5 pts)

On plonge un cadre rectangulaire dans de l'eau savonneuse, et un mince film d'eau se forme entre les montants du cadre.

## 2.1 Film vertical

Dans un premier temps, on maintient le film de savon vertical. Sous l'effet de la gravité, l'eau s'accumule en bas, et l'épaisseur du film  $e$  varie donc avec l'altitude. On appelle  $\alpha$  l'angle que forme un des cotés du film avec la verticale (voir figure 2 (a)). On prendra  $n = 4/3$  pour l'indice de l'eau savonneuse. On éclaire ce film avec une source monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  et sous une incidence normale par rapport à la deuxième membrane du film. Le schéma de la figure 2 (b) rassemble ces notations. On cherche à étudier la figure d'interférence obtenue.

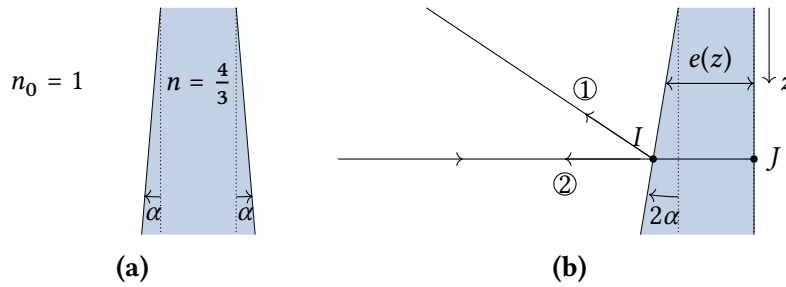


FIGURE 2 – (a) Film d'eau savonneuse vertical. L'angle  $\alpha$  est très exagéré. Pour étudier les interférences sur le système, on se place dans le cas équivalent de la figure (b) (obtenu par simple rotation) et on s'intéresse à un rayon lumineux incident en  $I$  sur le film.

2 - 1 Dispositif diviseur d'amplitude : chaque dioptre agit comme un miroir semi-réfléchissant, divisant l'intensité (et donc l'amplitude) entre une onde réfléchie et une onde transmise. D'autre part, on ne peut pas définir une limite géométrique à partir de laquelle les ondes passent par l'un ou l'autre des chemins ; ce n'est donc pas un diviseur de front d'onde, et c'est donc bel et bien un diviseur d'amplitude.

C'est l'analogue de l'interféromètre de Michelson en configuration coin d'air, à la différence près qu'on est dans un milieu d'indice  $n$ .

2 - 2

$$|\Psi_1| = \sqrt{R}|\Psi_0| \quad |\Psi_2| = \sqrt{RT^2}|\Psi_0| \quad \Rightarrow \quad \frac{|\Psi_2|}{|\Psi_1|} = T = \frac{48}{49} \approx 1 \quad (2.1.1)$$

2 - 3

$$\delta = 2ne(z) = 4n\alpha z \quad (2.1.2)$$

en prenant l'origine des  $z$  là où les deux dioptres se rencontreraient.

2 - 4

$$I(M) = I' \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right) = I' \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} 4n\alpha z \right) \right) \quad (2.1.3)$$

L'expression de l'intensité ne dépend que de  $z$ , les interférences sont donc des lignes parallèles dans le plan  $Oxz$ , ce sont des franges d'égale épaisseur.

2 - 5 Les franges brillantes sont données pour :

$$\frac{8\pi n\alpha z_k}{\lambda} = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad z_k = \frac{\lambda k}{4n\alpha} \quad (2.1.4)$$

et donc l'interfrange vaut :

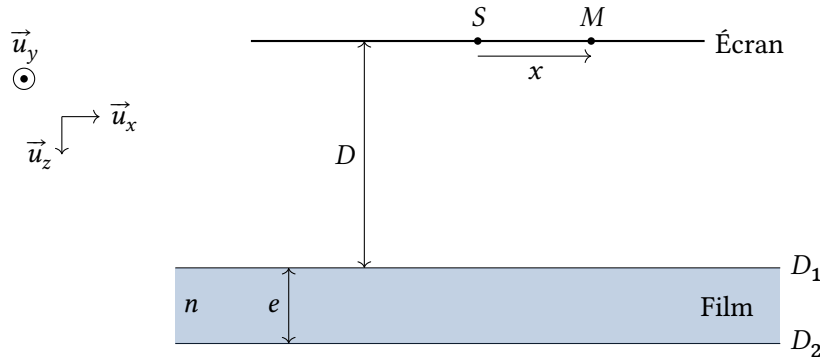
$$i = z_{k+1} - z_k = \frac{\lambda}{4n\alpha} \quad (2.1.5)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{4ni} = 1,18 \times 10^{-5} \text{ rad} = 0,7 \times 10^{-3} \text{ }^\circ \quad (2.1.6)$$

L'angle est très petit devant  $180^\circ$ , l'approximation des petits angles est donc justifiées.

## 2.2 Film horizontal

On place maintenant le film horizontalement, de sorte que l'épaisseur  $e$  est constante. On éclaire le film avec une lampe spectrale considérée comme ponctuelle, localisée en  $S$  à une distance  $D$  du film et émettant une longueur d'onde  $\lambda_0$ . On place cette source au centre d'un écran positionné parallèlement au film.



2 - 6  $S_1$  et  $S_2$  sont les symétriques de  $S$  par les dioptrics  $D_1$  et  $D_2$ .

$$S_1 (0, 0, 2D) \quad S_2 (0, 0, 2(D + ne)) \quad (2.2.1)$$

où on a considéré que le trajet optique dans l'eau correspond à l'indice multiplié par la distance  $e$ .

2 - 7

$$\overrightarrow{S_1M} = (x, y, -2D) \quad \overrightarrow{S_2M} = (x, y, -2(D + ne)) \quad (2.2.2)$$

2 - 8

$$|S_1M| = \sqrt{x^2 + y^2 + 4D^2} = \sqrt{\rho^2 + 4D^2} \quad |S_2M| = \sqrt{x^2 + y^2 + 4(D + ne)^2} = \sqrt{\rho^2 + 4(D + ne)^2} \quad (2.2.3)$$

2 - 9 Pour  $S_1M$ :

$$S_1M = \sqrt{\rho^2 + 4D^2} = 2D\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{4D^2}} \approx 2D\left(1 + \frac{\rho^2}{8D^2}\right) = 2D + \frac{\rho^2}{4D} \quad (2.2.4)$$

Pour  $S_2M$ :

$$S_2M = \sqrt{\rho^2 + 4(D + ne)^2} = 2(D + ne)\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{4(D + ne)^2}} \quad (2.2.5)$$

$$\approx 2(D + ne)\left(1 + \frac{\rho^2}{8(D + ne)^2}\right) = 2D + 2ne + \frac{\rho^2}{4(D + ne)} \quad (2.2.6)$$

$$= 2D + 2ne + \left(\frac{\rho^2}{4D}\right)\frac{1}{1 + \frac{ne}{D}} \approx 2D + 2ne + \frac{\rho^2}{4D}\left(1 - \frac{ne}{D}\right) \quad (2.2.7)$$

D'où on tire  $\delta$  :

$$\delta = S_2M - S_1M = 2ne - \frac{\rho^2 ne}{4D^2} = 2ne \left( 1 - \frac{\rho^2}{8D^2} \right) \quad (2.2.8)$$

2 - 10

$$I = I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right) = I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} [2ne(1 - \rho^2/8D^2)] \right) \right) \quad (2.2.9)$$

L'intensité dépend uniquement de la coordonnée polaire  $\rho$ , les franges seront donc des anneaux.

2 - 11 Les franges brillantes apparaissent pour :

$$\frac{2\pi}{\lambda} 2ne \left( 1 - \frac{\rho_k^2}{8D^2} \right) = 2k\pi \quad (2.2.10)$$

$$2ne \left( 1 - \frac{\rho_k^2}{8D^2} \right) = \lambda k \quad (2.2.11)$$

$$\frac{\rho_k^2}{8D^2} = 1 - \frac{\lambda k}{2ne} \quad (2.2.12)$$

$$\rho_k = 2\sqrt{2}D \sqrt{1 - \frac{\lambda k}{2ne}} \quad (2.2.13)$$

### 2.3 Source lorentzienne

La lampe spectrale utilisée n'est en fait pas strictement monochromatique, et sa densité spectrale est donnée par la relation :

$$dI = F(\omega) d\omega = \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \Delta\omega^2} d\omega \quad (2.3.1)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde. Ce profil spectral est appelé *lorentzienne* et est rencontré très fréquemment dans les lampes à vapeurs hautes pressions.

2 - 12  $F(\omega)$  est maximale pour  $\omega = \omega_0$  et  $F_{\max} = 1/\Delta\omega^2$ . On cherche pour quels  $\omega_{1/2}$  on a  $F(\omega_{1/2}) = F_{\max}/2$  :

$$\frac{1}{(\omega_{1/2} - \omega_0)^2 + \Delta\omega^2} = \frac{F_{\max}}{2} = \frac{1}{2\Delta\omega^2} \quad (2.3.2)$$

$$(\omega_{1/2} - \omega_0)^2 = \Delta\omega^2 \quad (2.3.3)$$

$$\omega_{1/2} = \omega_0 \pm \Delta\omega \quad (2.3.4)$$

La largeur a mi-hauteur de la densité spectrale est donc de  $2\Delta\omega$ .  $\omega_0$  est sa pulsation moyenne.

2 - 13

$$dI = F(\omega) [1 + \cos(2ne\omega/c)] d\omega = \frac{1 + \cos(2ne\omega/c)}{(\omega - \omega_0)^2 + \Delta\omega^2} d\omega \quad (2.3.5)$$

2 - 14 Les sources infinitésimales sont incohérentes entre elles, on somme donc les intensités :

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \cos(2ne\omega/c)}{(\omega - \omega_0)^2 + \Delta\omega^2} d\omega \quad (2.3.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \Delta\omega^2} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2ne\omega/c)}{(\omega - \omega_0)^2 + \Delta\omega^2} d\omega \quad (2.3.7)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega + \Re \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i2ne\omega/c)}{(\omega - \omega_0)^2 + \Delta\omega^2} d\omega \right) \quad (2.3.8)$$

La première intégrale correspond à l'intensité totale émise par la source, et la deuxième à la transformée de Fourier du profil spectral, où on a pris  $x = 2ne/c$ .

2 - 15 On fait le changement de variable :  $u = \omega - \omega_0$ , ce qui implique que  $du = d\omega$ . On remplace donc dans l'expression de la deuxième intégrale de la question précédente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i2ne\omega/c)}{(\omega - \omega_0)^2 + \Delta\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i2ne(u + \omega_0)/c)}{u^2 + \Delta\omega^2} du \quad (2.3.9)$$

$$= e^{i\frac{2ne\omega_0}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i2neu/c)}{u^2 + \Delta\omega^2} du \quad (2.3.10)$$

$$= \frac{\pi e^{i\frac{2ne\omega_0}{c}}}{\Delta\omega} e^{-\Delta\omega|2ne/c|} \quad (2.3.11)$$

On trouve donc :

$$I(e) = \frac{\pi}{\Delta\omega} \left( 1 + \Re \left( e^{i\frac{2ne\omega_0}{c}} e^{-\Delta\omega|2ne/c|} \right) \right) \quad (2.3.12)$$

$$= \frac{\pi}{\Delta\omega} \left( 1 + \cos \left( \frac{2ne\omega_0}{c} \right) e^{-\Delta\omega|2ne/c|} \right) \quad (2.3.13)$$

En utilisant les notations de l'énoncé, on a :

$$\alpha = \frac{\pi}{\Delta\omega} \quad \text{et} \quad V(e) = e^{-\Delta\omega|2ne/c|} \quad (2.3.14)$$

2 - 16 La visibilité a diminué de moitié pour  $e_0$  tel que  $V(e_0) = V_{\max}/2$ . La visibilité maximale

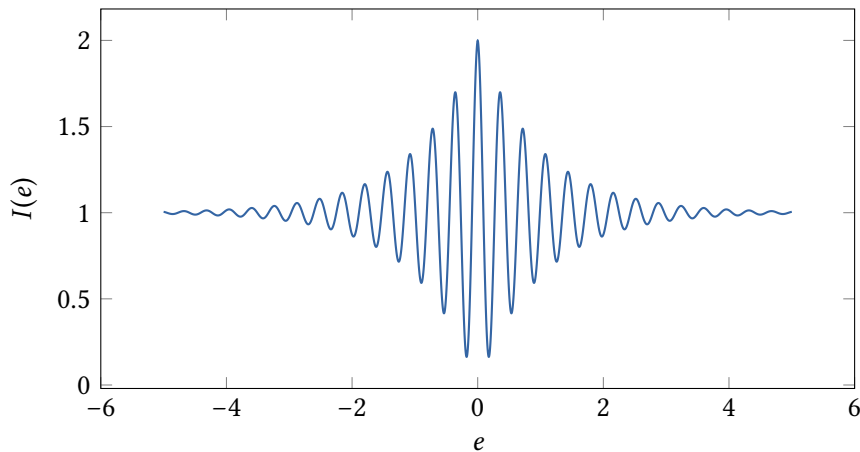


FIGURE 3 – Figure d'interférence obtenue avec une densité spectrale lorentzienne.

vaut 1, et on cherche :

$$\frac{1}{2} = \exp\left(-\Delta\omega \left|\frac{2ne_0}{c}\right|\right) \quad (2.3.15)$$

$$\Delta\omega \left|\frac{2ne_0}{c}\right| = \ln 2 \quad (2.3.16)$$

$$|e_0| = \frac{c \ln 2}{2n\Delta\omega} \quad (2.3.17)$$

Avec les données du problème, on trouve  $e = c \ln 2 / (4\pi n \Delta f) = 0,18 \text{ mm}$ . Par définition, cette distance correspond à la longueur de cohérence temporelle  $l_t$ .

### 3 Mesure d'indice et interféromètre de Michelson (3 pts)

On utilise un interféromètre de Michelson en configuration coin d'air et en utilisant une lumière blanche. Au centre de l'écran, on observe une frange très brillante et des franges colorées de part et d'autre, les teintes de Newton.

**3 - 1** Ces franges colorées sont les teintes de Newton. Elles sont nécessairement obtenues pour des différences de marche faibles. La frange centrale très brillante correspond donc à  $\delta = 0$ .

**3 - 2** Par rapport au Michelson sans lame de verre, on a ajouté 2 passages (aller et retour) dans le verre, et enlevé 2 passages dans l'air. La différence de marche additionnelle est donc  $2e(n - 1)$ .

**3 - 3** Si on retrouve la frange brillante, c'est qu'on est à nouveau au contact optique, là où  $\delta = 0$ . On a dû se déplacer de la différence de marche additionnel pour les retrouver, soit  $2e(n - 1) = 1,1 \text{ mm}$ , ce qui nous permet de trouver un indice de  $n = 1,55$ .