

# I Dipôle électrique, ciel bleu et polarisation naturelle

## 1 Préliminaire : analyse dimensionnelle

1. L'énergie émise par la particule doit se conserver lorsque l'onde s'éloigne de celle-ci. Ainsi, la puissance répartie sur une surface sphérique centrée sur la particule doit être constant quelque soit le rayon de la sphère. En supposant une répartition angulaire homogène, cette puissance vaut  $P_0 \sim \rho_p(r)r^2 = \text{Cste}$  ou  $\rho_p(r)$  est la densité de puissance pour un observateur placé à  $r$  de la particule diffusante. Ainsi, cette densité de puissance varie en  $1/r^2$ , et le champ est inversement proportionnel à la distance  $r$ .
2. L'hypothèse d'une particule de dimensions très faibles devant la longueur d'onde nous permet de la considérer comme une perturbation de faible conséquence. Au premier ordre, son influence sera donc proportionnelle à sa taille, donc son volume.
3. D'après ce que nous venons de dire, le rapport  $i$  est de la forme  $i \sim V/r$  et doit être sans dimension. La seule longueur restante au problème étant la longueur d'onde, on obtient :

$$i \sim \frac{V}{r\lambda^2} \quad (1)$$

Le spectre énergétique de la lumière diffusée variera donc en  $1/\lambda^4$ , et sera donc beaucoup plus important pour les courtes longueurs d'ondes ; le ciel n'est donc pas blanc mais possède une couleur tirant vers le bleu.

## 2 Dipôle électrostatique

1. Simple rappel de cours :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2)$$

2. Le potentiel du dipôle sera la somme des potentiels des deux charges :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right) \quad (3)$$

Il nous faut donc déterminer les distances PM et NM.

$$PM = \sqrt{\mathbf{PM} \cdot \mathbf{PM}} \quad (4)$$

$$= \sqrt{(\mathbf{PO} + \mathbf{OM}) \cdot (\mathbf{PO} + \mathbf{OM})} \quad (5)$$

$$= \sqrt{PO^2 + OM^2 + 2\mathbf{PO} \cdot \mathbf{OM}} \quad (6)$$

$$\simeq r \sqrt{1 + \frac{a \cos(\pi - \theta)}{r}} \quad \text{car } PO^2 \text{ est négligeable} \quad (7)$$

$$\simeq r - \frac{1}{2} a \cos(\theta) \quad (8)$$

où on n'a gardé que les termes à l'ordre 1 en  $a/r$ . De la même manière, on obtient  $NM \simeq$

$r + a \cos(\theta)/2$ , et on trouve pour  $V$  :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{1 - \frac{a \cos \theta}{2r}} - \frac{1}{1 + \frac{a \cos \theta}{2r}} \right) \quad (9)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 + \frac{a \cos \theta}{2r} - \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{2r} \right) \right) \quad (10)$$

$$= \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (11)$$

$$= \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (12)$$

Le potentiel électrique du dipôle statique est donc en  $1/r^2$ , à la différence du potentiel d'une charge ponctuelle, en  $1/r$ .

3. On calcule le champ électrique composante par composante avec  $\mathbf{E} = -\text{grad}(V)$  :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-2r}{r^4} \right) = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad (13)$$

$$E_\theta = \frac{-1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (14)$$

$$E_\phi = 0 \quad (15)$$

Bien entendu, le champ magnétique est nul en tous points, car il n'y a pas mouvement de charges.

### 3 Dipôle oscillant

#### a) Potentiels électrique et magnétique

1. Les potentiels retardés tiennent compte de la non instantanéité des phénomènes électromagnétiques. Le point  $M$  ne voit les changements opérés au point  $O$  qu'un temps  $OM/c$  plus tard. D'où l'expression de ces potentiels :

$$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(Q, t - QM/c)}{QM} d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{Q_i M} \quad (16)$$

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(Q, t - QM/c)}{QM} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i(t - Q_i M/c)}{Q_i M} \quad (17)$$

Les deuxièmes expressions correspondent au cas de charges ponctuelles, qui est le notre.

2. On a  $v \simeq a\omega \ll c$ , d'où :

$$a \frac{2\pi c}{\lambda} \ll c \quad (18)$$

$$a \ll \lambda \quad (19)$$

Comparons maintenant  $QM/c$  à  $r/c$  :

$$\frac{QM}{c} - \frac{r}{c} < \frac{a}{c} = \frac{2\pi a}{\omega \lambda} \ll \frac{2\pi}{\omega} = T \quad (20)$$

d'où l'on tire que  $t - QM/c \simeq t - r/c$ .

3. Lorsque la charge positive bouge avec une vitesse  $\mathbf{v}$ , elle crée une densité de courant  $\mathbf{j} = q\mathbf{v}/d\tau$ . Pour la charge négative, la vitesse est à l'opposée. On peut donc calculer le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{q\mathbf{v}(t - PM/c)}{PM} - \frac{-q\mathbf{v}(t - NM/c)}{NM} \right) \quad (21)$$

$$\simeq \frac{\mu_0 q \mathbf{v}(t - r/c)}{2\pi r} \quad (22)$$

$$\boxed{\mathbf{A}(M,t) \simeq \frac{\mu_0 \dot{\mathbf{p}}(t')}{4\pi r}} \quad \text{car } \mathbf{v} = \frac{1}{2} \dot{a} \mathbf{e}_z \quad (23)$$

$$(24)$$

4. On utilise la jauge de Lorentz et le développement de la divergence de  $\mathbf{A}$  pour calculer  $V$  :

$$0 = \text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (25)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \text{div} \left( \frac{\dot{\mathbf{p}}(t')}{r} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (26)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\dot{p}(t')}{r} \right) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (27)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{\dot{p}(t')}{r^2} - \frac{\ddot{p}(t')}{rc} \right) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{car } t' = t - r/c \quad (28)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r} \left( \frac{\dot{p}(t')}{r} + \frac{\ddot{p}(t')}{c} \right) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z \quad \text{avec } \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \quad (29)$$

En intégrant par rapport à  $t$ , on obtient :

$$\boxed{V(M,t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r} \left( \frac{\mathbf{p}(t')}{r} + \frac{\dot{\mathbf{p}}(t')}{c} \right) \cdot \mathbf{e}_r + \text{Cte}} \quad (30)$$

## b ) Champs électrique et magnétique

1. On commence par calculer le champ magnétique  $\mathbf{B}$  en calculant le rotationnel de  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) \quad (31)$$

$$= \text{rot} \left( \frac{\mu_0 \dot{p}(t') \mathbf{e}_z}{4\pi r} \right) \quad (32)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\dot{p}(t')}{r} \right) \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z \quad \text{d'après la formule donnée en énoncé} \quad (33)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{\dot{p}(t')}{r^2} - \frac{\ddot{p}(t')}{rc} \right) \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z \quad (34)$$

$$\boxed{\mathbf{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left( \frac{\dot{p}(t')}{r} + \frac{\ddot{p}(t')}{c} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\phi} \quad (35)$$

Pour le champ électrique, on utilise  $\mathbf{E} = -\text{grad}(V) - \partial \mathbf{A} / \partial t$ . Le calcul de  $\partial \mathbf{A} / \partial t$  ne pose aucun problème, et le vecteur résultant est orienté selon l'axe  $\mathbf{e}_z$  :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 \ddot{\mathbf{p}}(t')}{4\pi r} = \frac{\mu_0 \ddot{p}(t')}{4\pi r} (\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (36)$$

Pour calculer le gradient de  $V$ , on utilise la formule déjà donnée du gradient en coordonnées sphériques. On remarque par ailleurs que  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r = p \cos \theta$  car  $\mathbf{p}$  est orienté selon l'axe  $\mathbf{e}_z$ , et on n'oublie pas que  $t' = t - r/c$ .

$$\mathbf{grad}(V) \cdot \mathbf{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p(t')}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{p}(t')}{rc} \right) \right] \cos \theta \quad (37)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r^4} \left( -\frac{\dot{p}(t')}{c} r^2 - 2rp(t') \right) + \frac{1}{cr^2} \left( -\frac{\ddot{p}(t')}{c} r - \dot{p}(t') \right) \right] \cos \theta \quad (38)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{\ddot{p}(t')}{c^2 r} - \frac{2\dot{p}(t')}{cr^2} - \frac{2p(t')}{r^3} \right) \cos \theta \quad (39)$$

$$\mathbf{grad}(V) \cdot \mathbf{e}_\theta = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( \frac{\dot{p}(t')}{c} + \frac{p(t')}{r} \right) \sin \theta \quad (40)$$

$$\mathbf{grad}(V) \cdot \mathbf{e}_\phi = 0 \quad (41)$$

En combinant les deux, on obtient le champ électrique au point  $M$  :

$$\mathbf{E}(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2\dot{p}(t')}{cr^2} + \frac{2p(t')}{r^3} \right) \cos \theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\ddot{p}(t')}{rc^2} + \frac{\dot{p}(t')}{r^2 c} + \frac{p(t')}{r^3} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (42)$$

2. Comme on a pris  $p(t') = p_0 \exp(i(\omega t - kr))$ , la dérivée temporelle se calcule facilement :  $\dot{p} = i\omega p$ . D'autre part, dans la zone de rayonnement, on a  $\lambda \ll r$  et donc  $1/r^3 \ll \omega/(cr^2) \ll \omega^2/(c^2 r)$ . Les termes prépondérants sont donc ceux en dérivées secondes de  $p$ .

$$\mathbf{E}(M,t) \simeq \frac{\ddot{p}(t') \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 rc^2} \mathbf{e}_\theta = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r} p_0 \sin \theta e^{i(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\theta \quad (43)$$

$$\mathbf{B}(M,t) \simeq \frac{\mu_0 \dot{p}(t')}{4\pi rc} \sin \theta \mathbf{e}_\phi = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi rc} p_0 \sin \theta e^{i(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\phi \quad (44)$$

3. Les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires entre eux, perpendiculaires à la direction de propagation  $\mathbf{e}_r$  et en phase ; ce sont les caractéristiques d'une onde localement plane. En réalité, on voit qu'il s'agit d'une onde sphérique émise du point  $O$ , qui se comporte localement en onde plane à grande distance. En plus de cette remarque, on peut également noter que :

- le champ décroît en  $1/r$ , contrairement au champ d'un dipôle électrostatique, qui décroît en  $1/r^3$ .
- le champ électromagnétique est proportionnel à la dérivée seconde du moment dipolaire. On verra que cela aura une conséquence très importante. . .
- l'émission n'est pas isotrope, à cause du  $\sin \theta$  qui intervient dans les expressions des champs.

### c ) Puissance rayonnée

1. Le vecteur de Poynting est le produit vectoriel du champ électrique et de l'excitation magnétique :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (45)$$

On utilise les expressions des champs trouvées à la question précédente dans cette formule :

$$\mathbf{\Pi}(M,t) = \frac{\mu_0 \omega^4}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2(\theta) p_0^2 \cos^2(\omega t - kr) \mathbf{e}_r \quad (46)$$

On est repassé en notation réelle pour faire ce calcul.

2. La puissance moyenne rayonnée par unité de surface est la moyenne du vecteur de Poynting :

$$\frac{dP}{dS} = \langle \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{e}_r \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2(\theta) p_0^2 \quad (47)$$

3. La puissance rayonnée est maximale dans la direction perpendiculaire au dipôle, puisque c'est dans cette direction que  $\sin^2(\theta)$  est maximal. Elle est nulle pour  $\theta = 0$  ou  $\pi$ , c'est à dire dans la direction du dipôle.

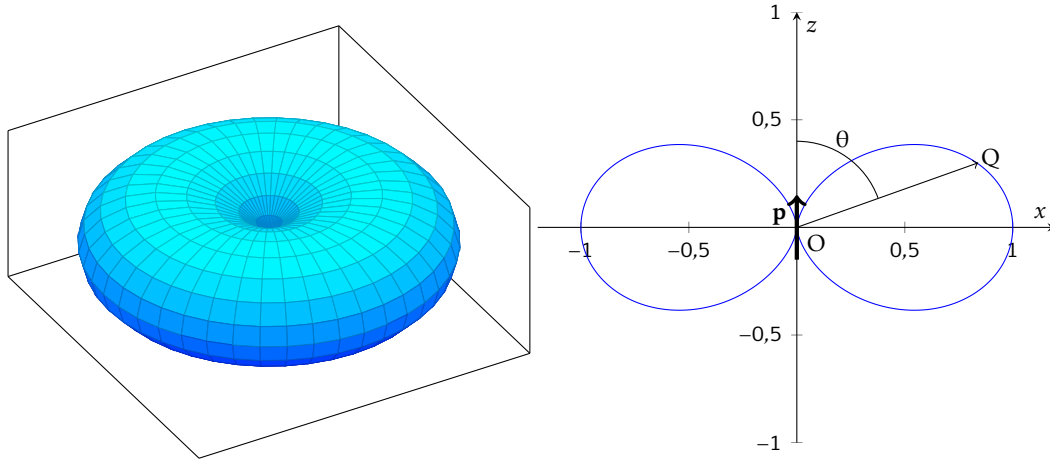


Figure 1 – Diagramme de rayonnement du dipôle électrique, en 3 dimension, ou selon une coupe dans le plan  $(x,z)$ . La distance à l'origine pour chaque point est proportionnelle à la puissance moyenne rayonnée dans cette direction.

4. On intègre sur la surface à  $r$  constant le projeté du vecteur de Poynting sur la normale à la surface, c'est à dire  $\mathbf{e}_r$ . Comme nous sommes en coordonnées sphériques, l'élément de surface  $dS$  vaut  $r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$ , et il vient :

$$P(r) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \langle \mathbf{\Pi}(r, \theta, \phi) \rangle \cdot \mathbf{e}_r r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (48)$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2(\theta) p_0^2 r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (49)$$

$$= \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi c} \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta \quad (50)$$

$$\boxed{P(r) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}} \quad (51)$$

On remarque que la puissance totale ne dépend pas de la distance d'observation : cela montre que la décroissance des champs en  $1/r$  n'est pas liée à un phénomène d'absorption, mais à la répartition de la puissance qui croît en  $r^2$ .

#### 4 Modèle de l'électron élastiquement lié

1. La taille du nuage électronique autour d'un atome est de l'ordre de l'ångström ; on prendra donc cette valeur comme borne supérieure :  $\|\rho\| \lesssim 1 \text{ \AA}$ . La longueur d'onde moyenne du rayonnement solaire, située dans le visible, est de l'ordre de 500 nm. On a donc  $\lambda \gg \|\rho\|$ , et le champ sera donc perçu comme uniforme par l'électron dont le mouvement est très petit par rapport à l'échelle des variations du champ électromagnétique.

2. L'expression générale de la force de Lorentz est :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (52)$$

avec  $\mathbf{v}$  la vitesse de la particule chargée, un électron dans notre cas. Sa vitesse est de l'ordre de  $\|\rho\|\omega \simeq \|\rho\|c/\lambda \simeq 10^5 \text{ ms}^{-1} \ll c$ . L'électron est donc bien non relativiste, et  $v \ll c$ . Comme  $\mathbf{B} = \mathbf{E}/c$ ,  $v\mathbf{B} \ll \mathbf{E}$  et la force magnétique est négligeable devant la force électrique.

3. On applique simplement le principe fondamental de la dynamique à l'électron en utilisant les forces données par l'énoncé :

$$m\ddot{\rho} = -m\omega_0^2\rho - m\Gamma\dot{\rho} - e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \quad (53)$$

4. Dans les directions perpendiculaires au champ électrique, l'équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sans second membre. La solution d'une telle équation aboutit à des oscillations amorties vers la position d'équilibre : ces solutions ne nous intéressent donc pas. Selon l'axe du champ électrique, en revanche, le terme de forçage  $E_0 \cos(\omega t)$  maintient l'électron en mouvement à la fréquence  $\omega$ , imposée par le champ environnant. La solution de l'équation s'obtient facilement en passant en notation complexe :

$$\rho(t) = -\frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \quad (54)$$

Le moment dipolaire vaut donc :

$$\mathbf{p}(t) = -e\rho(t) = \frac{e^2}{m} \frac{\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \quad (55)$$

5. En utilisant la formule trouvée précédemment pour la puissance rayonnée par un dipôle à la pulsation  $\omega$  (46), on obtient :

$$\Pi(\mathbf{M}) = \frac{\mu_0 e^4 \omega^4}{16\pi^2 r^2 m^2 c} \frac{E_0^2 \sin^2(\theta)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \mathbf{e}_r \quad (56)$$

On distingue trois régimes différents selon l'ordre de grandeur de  $\omega$  :

- $\omega \ll \omega_0$  : la pulsation du champ électromagnétique est très faible par rapport à la pulsation de résonance de l'électron élastiquement lié. On peut donc négliger  $\omega$  au dénominateur, et la puissance émise varie alors en  $\omega^4$  ; c'est la diffusion de Rayleigh.
- $\omega \simeq \omega_0$  : on est proche de la résonance électronique. L'émission est maximale.
- $\omega \gg \omega_0$  : la pulsation est très grande par rapport à la pulsation de résonance. Le terme en  $\omega_0$  peut être négligé au dénominateur, et l'émission devient indépendante de la pulsation. Ces 3 régimes se retrouvent très bien sur l'allure de la figure 2.

## 5 Diffusion Rayleigh et ciel bleu

1. Si un électron dans le niveau énergétique  $E_X$  d'une molécule d'azote (80 % des molécules de l'atmosphère) reçoit une onde électromagnétique d'énergie  $E_A - E_X$ , il l'absorbera et changera de niveau. Ceci se traduit par un transfert énergétique maximal entre l'électron et le rayonnement électromagnétique ; en mécanique classique, cela veut dire qu'on se trouve à la résonance. On aura donc  $E_A - E_X = \hbar\omega_0$ , et donc  $\omega_0 = 1,9 \times 10^{15} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Cette valeur correspond à une longueur d'onde de 100nm, dans l'ultraviolet lointain, très inférieure aux longueurs

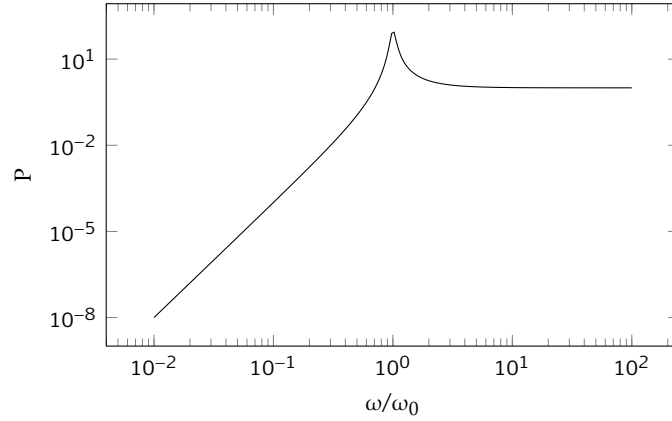


Figure 2 – Dépendance en  $\omega$  de la puissance rayonnée par l'électron élastiquement lié.

d'ondes la lumière visible. On considèrera donc que l'on est dans le régime  $\omega \ll \omega_0$ , et la puissance émise par le dipôle s'écrit alors :

$$\Pi(M) = \frac{\mu_0 e^4 E_0^2 \omega^4 \sin^2(\theta)}{16\pi^2 r^2 m^2 c \omega_0^2} \mathbf{e}_r \quad (57)$$

Ainsi, la diffusion des ondes électromagnétiques est proportionnelle à  $\omega^4$ . Les courtes longueurs d'ondes (bleu, violet, ultraviolet) seront donc d'avantage émises par le dipôle.

2. Le spectre de diffusion des électrons élastiquement liés vaut le produit du spectre d'excitation par la réponse des dipôles :

$$R(\lambda) = S(\lambda)P(\lambda) \quad (58)$$

$$\propto \frac{1}{\lambda^4 \lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} \quad (59)$$

$$(60)$$

Les courbes du spectre solaire, de la puissance rayonnée par le dipôle et du spectre du ciel sont représentées en figure 3. Le spectre du ciel contient donc une grande proportion d'ultraviolet.

On pose  $\gamma = hc/k_B T$  pour simplifier les notations. Pour déterminer le maximum de la réponse, on cherche à annuler la dérivée de l'expression précédente :

$$\frac{dR}{d\lambda} = \frac{-9}{\lambda} R(\lambda) + \frac{-\left(\frac{-\gamma}{\lambda^2}\right) e^{\gamma/\lambda}}{e^{\gamma/\lambda} - 1} R(\lambda) = 0 \quad (61)$$

$$\Rightarrow 9\lambda = \frac{\gamma}{(1 - e^{-\gamma/\lambda})} \quad (62)$$

Ces deux fonctions sont représentées dans l'énoncé, et se croisent pour  $\lambda = 279$  nm. Ainsi, la longueur d'onde d'émission se situe loin dans l'ultraviolet.

*Remarque :* le dioxygène et l'ozone de l'atmosphère absorbent toutes les radiations en dessous de 300 nm, avec une coupure rapide autour cette longueur d'onde. Le spectre n'est pas modifié dans le visible, et le maximum d'émission reste situé dans l'ultraviolet ; l'apparence bleue du ciel (et non pas violette) n'est pas évidente.

On peut expliquer qualitativement la couleur bleue du ciel en remarquant que la sensibilité de l'œil humain devient très faible pour les courtes longueurs d'onde. Pour une explication plus détaillée et plus convaincante, on pourra se référer à l'annexe A.

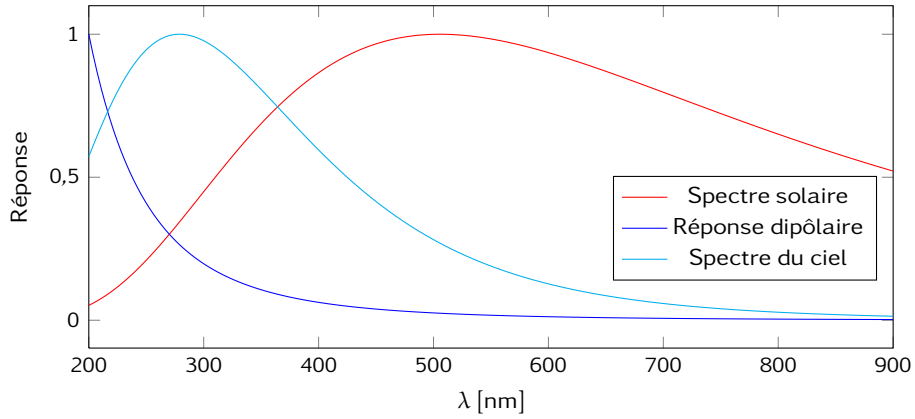


Figure 3 – Le spectre solaire, la réponse du dipôle électrique et le spectre du ciel sont représentés en fonction de  $\lambda$ . Toutes les courbes ont été normalisées pour l'intervalle considéré.

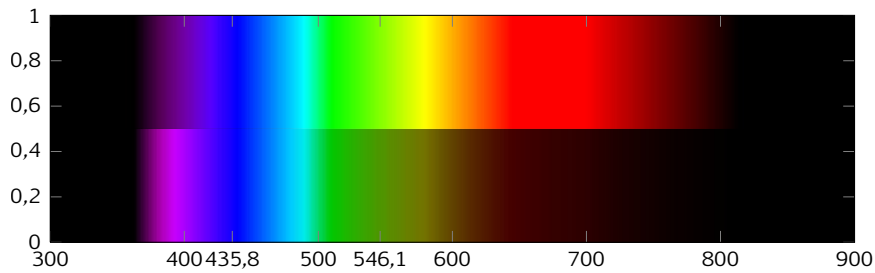


Figure 4 – Simulations d'un spectre « blanc » puis du spectre du ciel.

3. Les ondes émises par le soleil, lorsqu'elles traversent l'atmosphère, sont d'autant plus diffusées que leurs longueurs d'ondes sont faibles comme nous l'avons vu. Ainsi, le bleu est absorbé et ré-émis *dans toutes les directions* alors que les grandes longueurs d'ondes continuent leurs trajets en ligne droite. Le spectre du soleil est donc atténué dans le bleu, d'autant plus que la longueur de propagation dans l'atmosphère est grande ; au coucher ou au lever du soleil elle est maximale, et le spectre solaire est quasiment dépourvu de bleu.
4. On considère un faisceau lumineux émis par le soleil, observé a grande distance par un observateur sur Terre. L'observateur regarde une direction du ciel formant un angle  $\alpha$  avec la direction du soleil et voit la lumière diffusée par l'atmosphère. L'onde incidente sur l'électron élastiquement lié est soit polarisée dans la direction  $x$ , soit dans la direction  $y$ , et l'émission se fait donc majoritairement dans le plan perpendiculaire à cette direction (d'après 46 et la figure 1). Pour la polarisation orientée selon  $x$ , l'émission est constante quelque soit l'angle car l'observateur est toujours dans le plan perpendiculaire à  $x$ . En revanche, le terme en  $\sin \theta$  (pour le champ électrique) de l'émission du dipôle intervient pour la polarisation selon  $y$ . En considérant une onde incidente polarisée à  $45^\circ$ ,  $\mathbf{E}_0 = E_0/\sqrt{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$ , la polarisation reçue par l'observatoire s'exprime :

$$\mathbf{E}_d = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_{y'}) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_{y'}) \quad (63)$$

Ainsi, pour un angle  $\alpha = 90^\circ$ , la polarisation observée est uniquement dirigée selon l'axe  $x$  ; on n'a plus une polarisation aléatoire, mais bien une polarisation rectiligne. En pratique, le degré de polarisation est inférieur à 1 du fait des particules et autres objets en suspension dans l'atmosphère qui diffuse la lumière et la dépolairise.



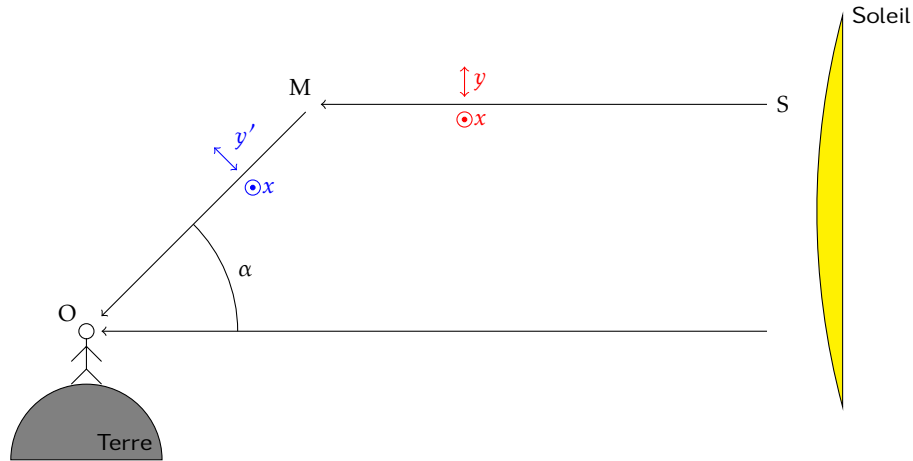


Figure 5 – Schéma de la propagation d’un rayon lumineux issu du soleil (S), diffusé sur une molécule d’azote de l’atmosphère (M) et observé sur Terre (O). Les deux polarisations possibles pour l’onde incidente sont données en rouge, celles de l’onde diffusée en bleu.

## A Colorimétrie

### 1 Système RGB

Pour expliquer la couleur bleue du ciel, il faut s’intéresser au mode de fonctionnement de l’œil humain, et aux techniques de rendu de la couleur. La couleur est perçue par l’œil par 3 types de cellules (les *cônes*) sensibles à des plages de longueurs d’ondes différentes, grossièrement *rouge* pour les grandes longueurs d’ondes, *vert* pour le milieu du spectre (540nm) et *bleu* pour les longueurs d’ondes courtes. Pour compliquer encore un peu plus le problème, le cône rouge est également légèrement sensible aux très courtes longueurs d’ondes ; c’est pour ça que le violet nous apparaît comme un mélange de rouge et de bleu.

Ainsi, une sensation colorée est un ensemble de 3 signaux issus de ces cônes : notre perception consiste donc en une projection de l’espace des longueurs d’ondes sur une base de 3 vecteurs. On peut donc simuler n’importe quelle sensation colorée avec seulement trois couleurs bien choisies, le système le plus connu étant le « RVB », qui prend une composante rouge (700nm), une verte (546,1 nm, raie verte du mercure) et une bleue (435,8nm, raie bleue du mercure). Des expériences de comparaison de couleurs ont permis de déterminer les fonctions permettant de passer d’un spectre quelconque à un triplet RVB (voir figure 6). On passe d’un spectre  $S(\lambda)$  au triplet  $(r;v;b)$  par la relation :

$$r = \int S(\lambda)R(\lambda) d\lambda \quad (64)$$

$$v = \int S(\lambda)V(\lambda) d\lambda \quad (65)$$

$$b = \int S(\lambda)B(\lambda) d\lambda \quad (66)$$

En faisant ce calcul, on obtient pour le spectre du ciel le triplet (renormalisé) (0,287 ; 0,493 ; 1), ce qu’un écran d’ordinateur (ou une imprimante... couleur) sait bien retranscrire :  . Ouf, le ciel est bien bleu !

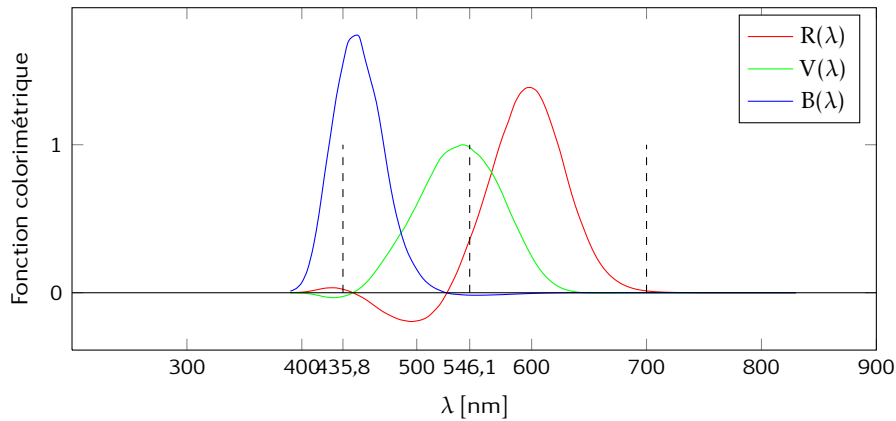


Figure 6 – Fonctions colorimétriques pour le système classique RVB. Les trois courbes ont été re-normalisées pour donner un blanc parfait (1 ; 1 ; 1) pour le spectre solaire donné (corps noir à  $T = 5750\text{K}$ ).

## 2 Système XYZ

Les fonctions colorimétriques RGB sont négatives en certains points. Un radiation monochromatique à 500nm aura notamment une composante R négative. Ceci n'est bien entendu pas possible, et montre que le système RGB ne permet pas de traduire toutes les perceptions colorées possibles. Face à ce problème, un nouveau système a été créé par le CIE (Comité International de l'Éclairage), dans lequel les fonctions colorimétriques seraient toutes positives, et qui serait capable de décrire toutes les couleurs (et même plus). C'est le système XYZ, dont les fonctions colorimétriques sont représentées en figure 7. Dans la pratique, on utilise seulement les composantes  $x = X/(X + Y + Z)$  et  $y = Y/(X + Y + Z)$  qui suffisent à décrire la couleur, la dernière coordonnée quantifiant « l'intensité » de celle-ci.

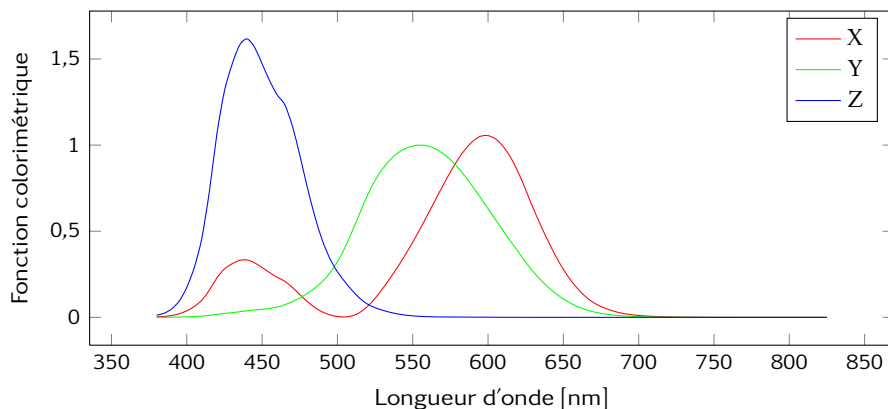


Figure 7 – Fonctions colorimétriques du système XYZ.

Dans ce système, les coordonnées de la couleur du ciel bleu sont ( $x = 0,239$  ;  $y = 0,237$ ). Mais quel est l'intérêt d'avoir de nouvelles coordonnées dans ce nouveau système ? Pour mieux comprendre, il faut représenter les couleurs dans un *diagramme de chromaticité* donnant la couleur de chaque point du plan ( $x,y$ ), comme celui de la figure 8. Toutes les couleurs accessibles à l'œil humain sont situées à l'intérieur de la partie colorée, dont les bords sont soit des longueurs d'onde pures, soit sur la *ligne violette* qui relie la plus petite longueur d'onde visible à la plus grande. Au centre, à la position ( $x = 0,33$  ;  $y = 0,33$ ) se trouve le blanc du soleil à  $T = 5750\text{K}$ . Le domaine accessible

au système RGB (théorique) tel que défini précédemment est donné par le triangle blanc dont les sommets sont les trois longueurs d'ondes pour le rouge, le vert et le bleu. Comme les écrans utilisent ce système, ils sont incapables de restituer les couleurs à l'extérieur de ce domaine. En pratique, on obtient des valeurs négatives pour une ou plusieurs composantes dans le système RGB, que j'ai mises à 0 pour cette représentation.

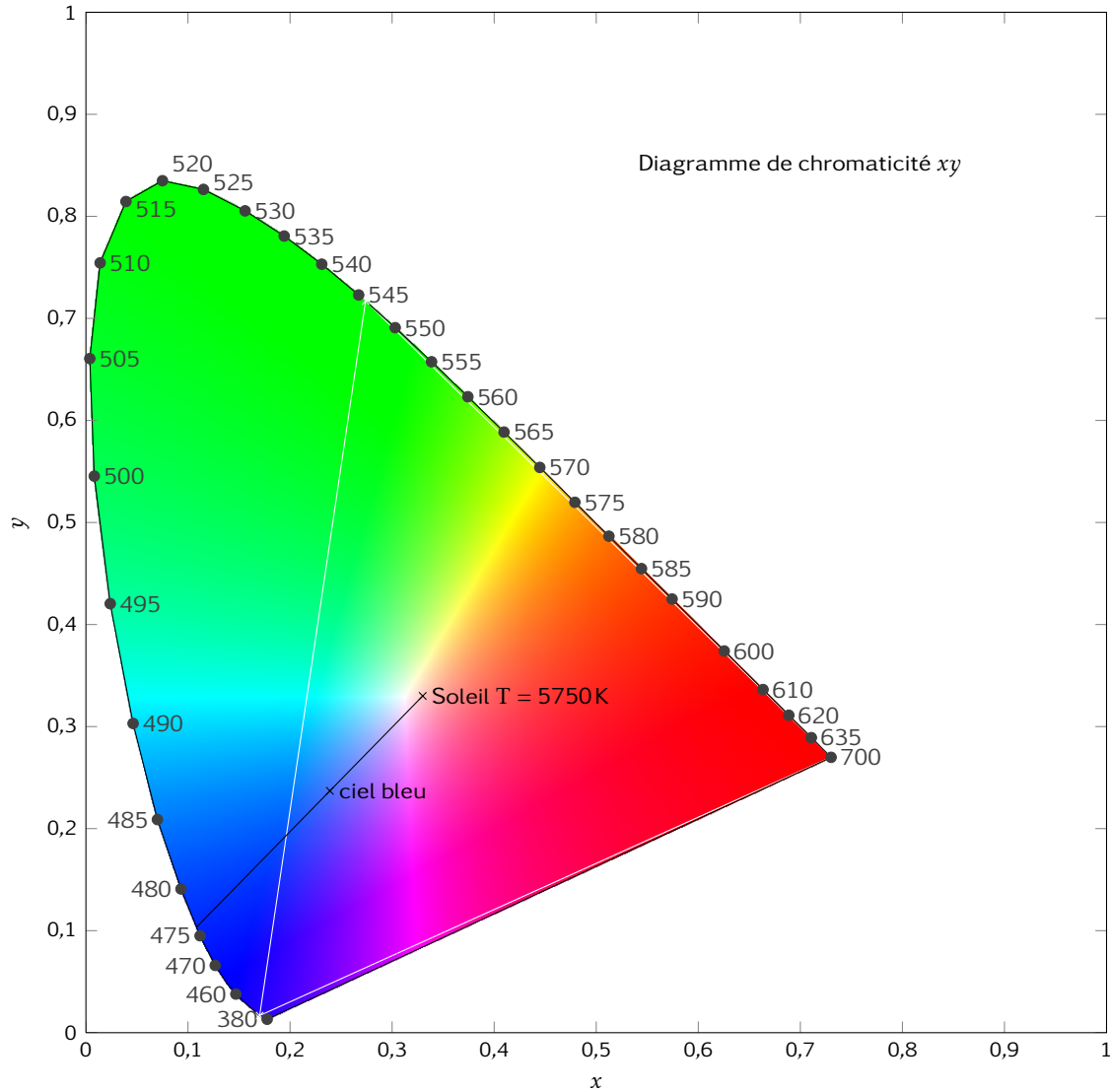


Figure 8 – Diagramme de chromaticité  $xy$ . Les longueurs d'ondes pures (en nm) sont situées à la limite du spectre coloré visible, le blanc (spectre du soleil) est au centre ( $x = 0,33 ; y = 0,33$ ). Le triangle blanc représente l'étendue de l'espace CIE-RGB, ce qu'un écran est théoriquement capable de restituer. La couleur du ciel bleu ( $x = 0,239 ; y = 0,237$ ) est située sur une ligne entre la couleur de longueur d'onde pure  $\lambda \approx 475$  nm et le blanc ; on dit donc que la longueur d'onde équivalente de cette couleur est 475 nm.

Enfin, on a pointé la coordonnée du ciel bleu ( $x = 0,239 ; y = 0,237$ ). On peut tracer un segment de droite entre le spectre blanc et le spectre du ciel, qui coupe le bord du domaine visible pour une couleur de longueur d'onde pure d'environ 475 nm ; c'est la *longueur d'onde dominante*. On peut également définir la *pureté* de cette couleur, c'est à dire le ratio entre la distance entre le blanc et la

couleur du ciel bleu, et la distance entre le blanc et la couleur de longueur d'onde pure. On trouve 42% pour le ciel. Ainsi, la perception colorée du ciel est la même que celle d'un mélange de 42% d'une lumière monochromatique à 475 nm et le reste de lumière blanche.

Grâce à ce système XYZ, on peut donc évaluer une longueur d'onde dominante de 475 nm pour le ciel, ce qui est bien une longueur d'onde de couleur bleue.

## B Références

J'ai utilisé bon nombre de sources pour ce problème. Voici les plus importantes :

- L'article de Lord Rayleigh : « On the Light from the Sky, its Polarization and Colour, » *Phil. Mag.* **xli** p. 107-120 (1871). Il est trouvable dans le premier volume de « Scientific Papers » de John William Strutt, Baron Rayleigh, disponible sur le site <http://www.archive.org>.
- Les cours et TD d'Alain Robichon (<http://alainrobichon.free.fr/cours.html>) pour la partie « académique ».
- R.T. Birge, « The Energy Levels of the Nitrogen Molecule, » *Nature* 117, page 81 (1926), pour l'énergie de transition de la molécule N<sub>2</sub>.
- Un cours de colorimétrie en ligne, par Luc Brun : [http://www.greyc.ensicaen.fr/~luc/ENSEIGNEMENT/COURS/TR\\_IMG/cours.html](http://www.greyc.ensicaen.fr/~luc/ENSEIGNEMENT/COURS/TR_IMG/cours.html).
- <http://www-cvrl.ucsd.edu/cmfs.htm> pour les fonctions colorimétriques (attention, elles ne sont pas normalisées).
- L'article Wikipédia sur le système colorimétrique « XYZ » [http://fr.wikipedia.org/wiki/CIE\\_XYZ](http://fr.wikipedia.org/wiki/CIE_XYZ) et la référence citée <http://www.fho-emden.de/~hoffmann/ciexyz29082000.pdf>.
- Un superbe cours sur la photographie, avec une partie colorimétrie bien faite et en français <http://www.photo-lovers.org/index.html.fr>.

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Dipôle électrique, ciel bleu et polarisation naturelle</b>	<b>1</b>
1	Préliminaire : analyse dimensionnelle . . . . .	1
2	Dipôle électrostatique . . . . .	1
3	Dipôle oscillant . . . . .	2
	a) Potentiels électrique et magnétique . . . . .	2
	b) Champs électrique et magnétique . . . . .	3
	c) Puissance rayonnée . . . . .	4
4	Modèle de l'électron élastiquement lié . . . . .	5
5	Diffusion Rayleigh et ciel bleu . . . . .	6
<b>A</b>	<b>Colorimétrie</b>	<b>9</b>
1	Système RGB . . . . .	9
2	Système XYZ . . . . .	10
<b>B</b>	<b>Références</b>	<b>12</b>