

Optique géométrique

GEIPI 2A

A. Coillet

aurelien.coillet@u-bourgogne.fr

Année universitaire 2019-2020



Table des matières

1	Principes de base de l'optique géométrique	4
1.1	Rayons lumineux et principe de Fermat	4
1.2	Lois de Snell-Descartes	6
2	Formation des images en optique géométrique	8
2.1	Définitions	8
2.1.1	Systèmes optiques	8
2.1.2	Conjugaison	8
2.1.3	Stigmatisme	8
2.1.4	Espaces objet et image	9
2.2	Systèmes optiques simples	10
2.2.1	Dioptré sphérique	10
2.2.2	Miroir sphérique	13
2.2.3	Lentilles minces	14
2.2.4	Foyers secondaires	16
3	Systèmes centrés dans l'approximation de Gauss	17
3.1	Exemple introductif	17
3.2	Systèmes centrés	18
3.2.1	Éléments cardinaux	18
3.2.2	Construction des images	19
3.2.3	Distances focales et vergence	20
3.2.4	Relations de conjugaison et grandissement	22
3.2.5	Positions relatives des points nodaux et principaux	23
3.3	Association de systèmes centrés	23
3.4	Exemple : lentille épaisse	27
3.4.1	Méthodologie	27
3.4.2	Lentille épaisse	27
4	Optique matricielle	30
4.1	Définitions	30
4.1.1	Matrice colonne	30
4.1.2	Matrice de transfert	31
4.1.3	Propagation libre	32
4.1.4	Dioptré sphérique et lentille mince	32
4.1.5	Miroir sphérique	33
4.1.6	Système centré quelconque	34

4.1.7	Vergence	34
4.1.8	Matrice de conjugaison	35
4.1.9	Plans principaux et nodaux	36
4.2	Utilisation des matrices	36
4.2.1	Relation de conjugaison	37
4.2.2	Association de deux systèmes centrés	37
4.2.3	Exemple : lentille épaisse	38

1 Principes de base de l'optique géométrique

1.1 Rayons lumineux et principe de Fermat

L'optique géométrique s'appuie sur la notion de *rayon lumineux* pour décrire la propagation de la lumière dans des systèmes optiques simples (milieu transparent homogène, dioptré, lentilles, miroirs).

Rayon lumineux On modélise la lumière par un ensemble de *rayons lumineux* dont les trajectoires peuvent être représentées par des traits. Une telle représentation est utilisée par Newton dès les années 1700. Ces rayons lumineux n'interagissent pas entre eux et peuvent être observés quand ils atteignent un détecteur optique (œil, photo-diode, ...).

Un *faisceau lumineux* est un ensemble de rayons lumineux. Un faisceau *parallèle* est constitué de rayons lumineux parallèles les uns aux autres. Une source située à l'infini produit un faisceau parallèle. Les rayons d'un *faisceau conique* passent tous par un même point.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre sur la diffraction, il s'agit d'une *approximation* qui n'est valable que si la longueur d'onde de la lumière est très petite devant les dimensions des ouvertures et obstacles qu'elle rencontre : $\lambda \ll D$, avec D le diamètre d'une lentille, par exemple.

Principe de Fermat Nous avons vu dans le chapitre sur la diffraction que les ondes lumineuses suivent effectivement un trajet où les interférences sont *constructives*, et nous avons en particulier retrouvé les lois de Snell-Descartes en utilisant uniquement le principe de Huygens-Fresnel. Un concept similaire avait été développé auparavant par Fermat, qui aboutissait à la même conclusion.

Le principe de Fermat stipule que la trajectoire effectivement suivie $(AB)_{\mathcal{C}}$ par la lumière pour aller d'un point A à un point B est celle qui rend le chemin optique *stationnaire*. Une trajectoire stationnaire \mathcal{C} est telle que la dérivée spatiale du chemin optique est nulle :

$$d(AB)_{\mathcal{C}} = 0 \tag{1.1.1}$$

Cette trajectoire \mathcal{C} correspond donc à un extremum du chemin optique. Dans le cadre de l'optique ondulatoire, cela correspond à des interférences constructives.

Dans le cas de la propagation dans un milieu d'indice homogène n_0 , le chemin optique

s'exprime :

$$(AB)_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} n(s) ds = n_0 \int_A^B ds \quad (1.1.2)$$

$\int_A^B ds$ correspond à la longueur d'un chemin entre A et B , et elle est extrémale (ici minimale) lorsque ce chemin est un segment de droite. Le principe de Fermat permet donc de montrer que *la propagation de la lumière dans un milieu homogène se fait selon une droite*, conformément à notre intuition.

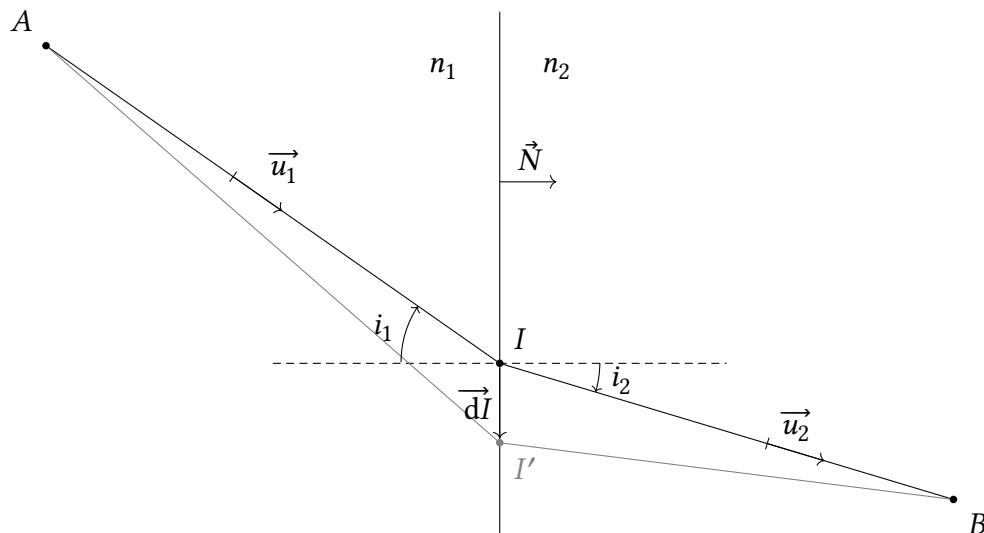


FIGURE 1.1 – Utilisation du principe de Fermat pour déterminer le point de réfraction I pour un rayon entre A et B , passant par un dioptré plan séparant un milieu d'indice n_1 et un milieu d'indice n_2 .

Utilisation du principe de Fermat Dans le cas d'un *dioptré plan*¹ séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 , nous allons chercher à déterminer le point I où le rayon lumineux se réfracte (voir figure 1.1). Pour ce faire, nous allons commencer par calculer le chemin optique selon une trajectoire passant par un point I' quelconque, prendre la différentielle de cette expression et trouver la condition pour qu'elle s'annule.

Utilisation de Fermat sur un dioptré

On finit donc par obtenir :

$$n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2 = \alpha \vec{N} \quad (1.1.3)$$

où α est une constante multiplicative.

1. Pour rappel, un dioptré est une surface de séparation entre deux milieux homogènes et isotropes

1.2 Lois de Snell-Descartes

Nous utilisons la relation 1.1.3 démontrée précédemment pour retrouver les lois de Snell-Descartes.

1^{re} loi de la réfraction La relation 1.1.3 peut s'écrire

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{n_2}(n_1 \vec{u}_1 - \alpha \vec{N}) \quad (1.2.1)$$

ce qui indique que le rayon réfracté (\vec{u}_2) est dans le plan défini par le rayon incident (\vec{u}_1) et la normale au plan \vec{N} . Ce plan est appelé plan d'incidence.

2^e loi de la réfraction En multipliant vectoriellement à gauche par \vec{N} la relation 1.1.3, et en remarquant que le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est toujours nul ($\vec{N} \times \vec{N} = \vec{0}$), il vient :

$$n_1 \vec{N} \times \vec{u}_1 = n_2 \vec{N} \times \vec{u}_2 \quad (1.2.2)$$

En notant i_1 et i_2 les angles orientés à partir de la normale vers les rayons incidents et réfracté, on aboutit à l'expression de la 2^e loi de Snell-Descartes pour la réfraction :

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2} \quad (1.2.3)$$

1^{re} loi de la réflexion Dans le cas de la réflexion, les deux rayons appartiennent au même milieu, et $n_1 = n_2$. La relation 1.2.1 reste valable, et le rayon réfléchi (\vec{u}_2) est dans le plan défini par le rayon incident (\vec{u}_1) et la normale au plan \vec{N} , le plan d'incidence.

2^e loi de la réflexion Avec $n_1 = n_2$, la relation 1.2.2 devient :

$$\vec{N} \times \vec{u}_1 = \vec{N} \times \vec{u}_2 \quad (1.2.4)$$

$$\sin i_1 = \sin(\pi + i_2) \quad (1.2.5)$$

Comme les angles d'incidence et de réflexion sont compris entre 0 et $\pi/2$, il vient que $i_2 = -i_1$, et donc que les valeurs absolues des angles incident et réfléchi sont égaux :

$$\boxed{|i_2| = |i_1|} \quad (1.2.6)$$

Angle de réfraction limite Si le second milieu est plus réfringent que le premier, $n_2 > n_1$, alors l'angle i_2 est plus faible que i_1 . Le rayon réfracté se rapproche donc de la normale, et il est toujours existant.

En revanche, si le second milieu est moins réfringent, $n_2 < n_1$, alors le rayon réfracté s'éloigne de la normale. À partir d'un angle i_{1L} appelé *angle limite*, $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ devient supérieur à 1, et l'équation 1.2.3 n'a pas de solution réelle. Le rayon réfracté n'existe alors plus, et on

parle de *réflexion totale* puisque le rayon lumineux est entièrement réfléchi par le dioptre. La valeur de l'angle d'incidence limite i_{1L} est obtenue en imposant $i_2 = \pi/2$ (sa valeur maximale) :

$$\sin i_{1L} = \frac{n_2}{n_1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.2.7)$$

Quelques valeurs :

- Interface eau - air : $n_1 = 4/3$, $n_2 = 1$, $i_{1L} = 48,6^\circ$.
- Interface eau sucrée à 75 % - air : $n_1 = 1,48$, $i_{1L} = 42,5^\circ$. La différence d'angle limite entre l'eau et l'eau sucrée permet de mesurer la teneur en sucre d'un jus de fruit, par exemple.
- Interface verre - air : $n_1 = 3/2$, $n_2 = 1$, $i_{1L} = 41,8^\circ$.
- Interface diamant - air : $n_1 = 2,4$, $n_2 = 1$, $i_{1L} = 24,6^\circ$. Le très faible angle limite du dioptre diamant - air fait qu'une grande partie des rayons tombant sur un diamant taillé subissent de nombreuses réflexions internes, lui conférant ainsi un aspect brillant et scintillant, d'où son usage important en bijouterie.

Constructions de Descartes et Huygens Le trajet des rayons réfractés par un dioptre plan peut être tracé graphiquement avec compas et équerre en utilisant les constructions de Descartes et Huygens, présentées en figure 1.2.

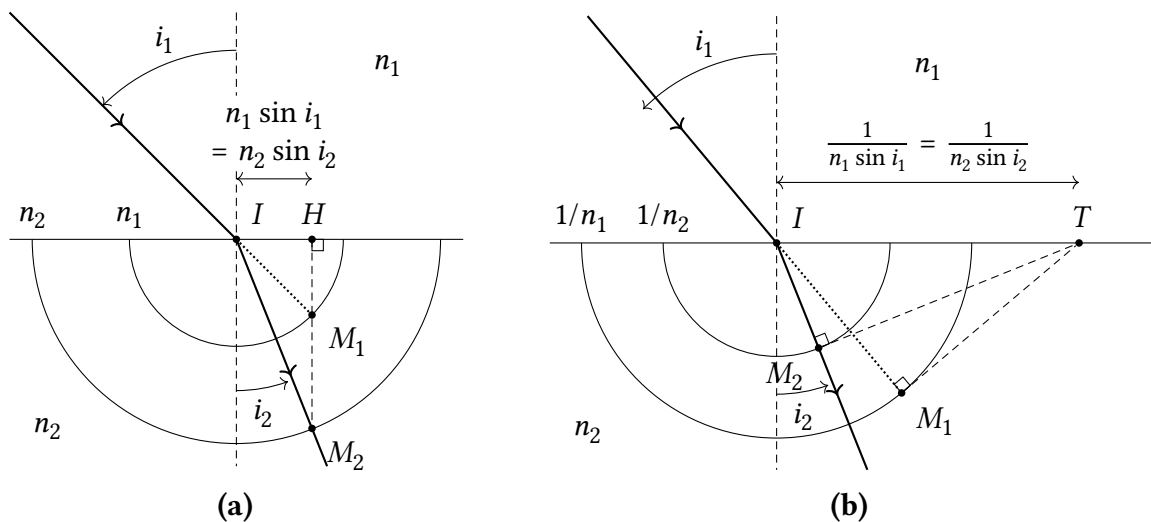


FIGURE 1.2 – (a) construction de Descartes. (b) construction de Huygens.

2 Formation des images en optique géométrique

2.1 Définitions

2.1.1 Systèmes optiques

Un *système optique* est un ensemble de milieux transparents séparés par des dioptries. En général les dioptries sont à symétrie de révolution et l'axe de révolution est commun à l'ensemble des dioptries. Dans ce cas, le système est un *système centré* et l'axe est *l'axe optique* du système.

Les systèmes *dioptriques* ne comportent que des milieux transparents et leur fonctionnement repose sur la réfraction. Si la lumière subit au moins une réflexion dans le système, il est dit *catadioptrique*.

2.1.2 Conjugaison

On considère un objet ponctuel A_o émettant des rayons lumineux : il forme donc un faisceau lumineux conique dont il est le sommet. Si tous les rayons issus de ce point A_o émergent d'un système optique en convergeant vers un point A_i , on dit que :

- A_i est l'image *conjugée* de A_o
- A_o et A_i sont des points conjugués du système
- le faisceau lumineux conique dont le sommet est A_o a été transformé par le système en un faisceau lumineux conique de sommet A_i .
- l'onde sphérique issue de A_o a été transformée en onde sphérique issue de A_i .

2.1.3 Stigmatisme

Stigmatisme rigoureux Si tous les rayons issus d'un point A_o sortent du système optique en convergeant vers un point A_i , on dit qu'il y a *stigmatisme rigoureux* pour les points A_o et A_i . Selon le principe de Fermat, tous ces rayons ont alors le même chemin optique : $(A_o A_i)_{\mathcal{C}} = \text{cte}$ où \mathcal{C} correspond à la trajectoire de l'un de ces rayons. En termes d'interférences, cela signifie que toutes les ondes allant de A_o à A_i ont la même phase. En particulier sur la figure 2.1, cela se traduit par :

$$(A_o A_i) = n_o A_o I + (IJ) + n_i J A_i = n_o A_o I' + (I' J') + n_i J' A_i \quad (2.1.1)$$

Seul le miroir plan est rigoureusement stigmatique pour tous les points de l'espace. Quelques rares systèmes (miroirs elliptiques, hyperboliques, ...) possèdent des points conjugués rigoureusement stigmatiques.

Stigmatisme approché Le stigmatisme rigoureux n'est qu'une idéalisation, ne serait-ce qu'à cause de la diffraction qui élargit nécessairement l'image d'un point. L'image d'un point par un système optique est donc *un petit volume* et non un point. Cependant, la structure des capteurs (œil, film photographique, capteur, ...) est granulaire ; l'image obtenue sera donc satisfaisante si les dimensions de ce volume sont inférieures à celles des pixels du capteur. On parle alors de *stigmatisme approché*. Autrement dit, un système optique présentera un stigmatisme approché pour un couple de points A_o et A_i si tout rayon passant par A_o passe aussi *au voisinage* de A_i après la traversée du système.

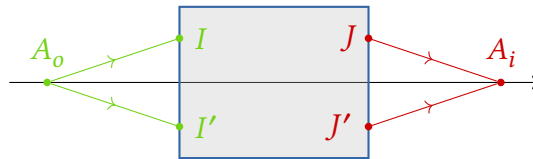


FIGURE 2.1 – (a) Condition de stigmatisme rigoureux : $(A_o I J A_i) = (A_o I' J' A_i)$.

Approximation de Gauss On peut montrer qu'un système optique présente un stigmatisme approché lorsque *les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe*, c'est à dire :

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha \quad (2.1.2)$$

Il s'agit de *l'approximation de Gauss* que nous utiliserons systématiquement à partir de maintenant.

2.1.4 Espaces objet et image

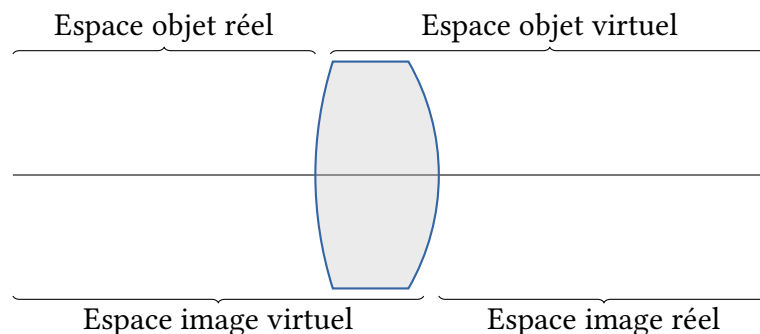


FIGURE 2.2 – Système optique et ses espaces objet et image.

Un système optique est représenté par ses dioptrés extrêmes, comme montré en figure 2.2. La face d'entrée du système sépare l'espace en *espace des objets réels* (avant la face d'entrée) et *espace des objets virtuels* (après la face d'entrée). Un objet est *réel* s'il existe physiquement, et il doit alors se trouver dans l'espace objet réel. Inversement, s'il se situe dans l'espace objet virtuel, l'objet est *virtuel* et n'existe pas physiquement : il s'agit généralement d'une image produite par un autre système optique.

De même, la face de sortie sépare l'espace en *espace des images virtuelles* (en avant de la face de sortie) et un *espace des images réelles* (après la face de sortie). Une image est *réelle* si elle peut être observée sur un support physique (écran, pellicule, capteur, rétine, ...) dans l'espace image du système. Une image est *virtuelle* lorsqu'elle se forme avant le dioptré de sortie de système. Ces notions sont rassemblées en figures 2.2 et 2.3. Dans le dernier exemple de la figure 2.3, on notera que l'image virtuelle A_i appartient bien au milieu de sortie (espace image) d'indice n_i , indépendamment de sa localisation physique dans le milieu d'entrée d'indice n_o .

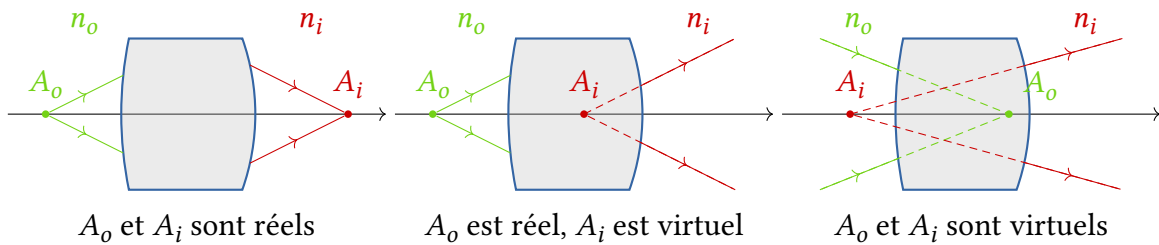


FIGURE 2.3 – Exemples d'objets et images virtuels ou réels, selon les cas.

2.2 Systèmes optiques simples

2.2.1 Dioptré sphérique

Un dioptré sphérique est une calotte sphérique qui sépare deux milieux transparents homogènes isotropes d'indices n_o et n_i . On note $R = \overline{SC}$ le rayon de courbure de la calotte sphérique, où S est l'intersection de la calotte sphérique et l'axe optique (le sommet), et C est son centre.

Formule de conjugaison au sommet On cherche à trouver une relation entre la position d'un objet A_o et son conjugué A_i en utilisant les relations de Descartes.

Détermination de la formule de conjugaison du dioptré sphérique.

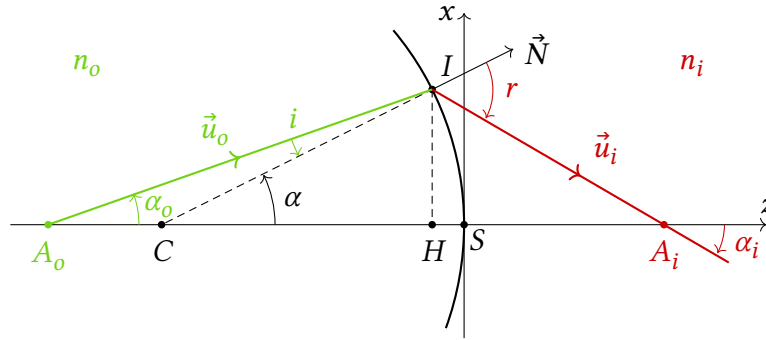


FIGURE 2.4 – Dioptré sphérique, lois de Snell-Descartes et formule de conjugaison.

On arrive donc à la *formule de conjugaison avec origine au sommet du dioptré sphérique* :

$$\boxed{\frac{n_i}{SA_i} - \frac{n_o}{SA_o} = \frac{n_i - n_o}{SC} = V} \quad (2.2.1)$$

Définitions On définit alors différentes quantités liées au dioptré :

Vergence :

$$\boxed{V = \frac{(n_i - n_o)}{SC}} \quad (2.2.2)$$

La vergence est indépendante du sens de propagation de la lumière, et son unité est la *dioptrie* (m^{-1}). Le dioptré est *convergent* si $V > 0$ et *divergent* si $V < 0$.

Foyer image : F_i est l'image d'un objet situé à l'infini : $\overline{SA_o} = -\infty$ de telle sorte que :

$$\boxed{f_i = \overline{SF_i} = \frac{n_i}{V}} \quad (2.2.3)$$

f_i est la *distance focale image* du dioptré. Le *plan focal image* est le plan passant par F_i et perpendiculaire à l'axe optique.

Foyer objet : F_o est l'objet donnant une image à l'infini : $\overline{SA_i} = \infty$ de telle sorte que :

$$\boxed{f_o = \overline{SF_o} = -\frac{n_o}{V}} \quad (2.2.4)$$

f_o est la *distance focale objet*, et le *plan focal objet* est le plan passant par F_o et perpendiculaire à l'axe optique.

On remarque que $f_i/f_o = -n_i/n_o$, les distances focales image et objet ne sont donc pas égales.

Grandissements On utilisera les notations de la figure 2.5 pour les démonstrations et définitions suivantes.

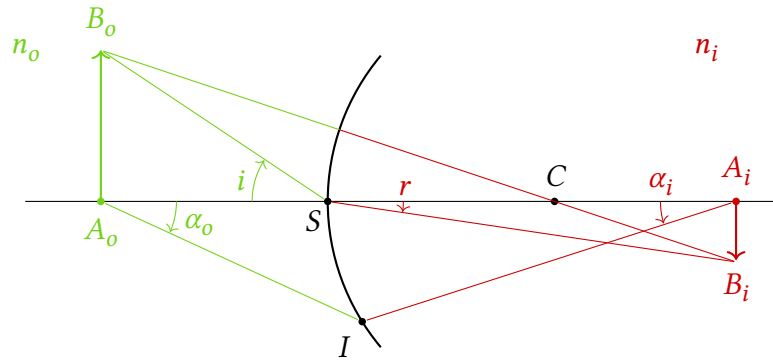


FIGURE 2.5 – Dioptre sphérique, grandissements

Le *grandissement transversal* γ est le rapport algébrique entre la taille de l'image et celle de l'objet : $\gamma = \overline{A_i B_i} / \overline{A_o B_o}$. On cherche à l'exprimer en fonction des paramètres du dioptre et de la position de l'objet et de l'image.

Calcul du grandissement transversal.

On obtient alors le grandissement transversal :

$$\gamma = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_o B_o}} = \frac{n_o \overline{S A_i}}{n_i \overline{S A_o}} \quad (2.2.5)$$

Le *grandissement angulaire* G_a est le rapport entre les angles α_i et α_o . Sur la figure 2.5, on repère : $\alpha_i \approx -\overline{S I} / \overline{S A_i}$ et $\alpha_o \approx -\overline{S I} / \overline{S A_o}$, et donc :

$$G_a = \frac{\alpha_i}{\alpha_o} = \frac{\overline{S A_o}}{\overline{S A_i}} \quad (2.2.6)$$

En utilisant la formule du grandissement transversal, on remarque que $e\gamma G_a = n_o/n_i$.

Construction graphique d'une image Une fois la position des foyers connues, on peut tracer 3 rayons simplement :

- Un rayon passant par le centre de courbure C est transmis sans être dévié.
- Un rayon incident parallèle à l'axe optique est réfracté en passant par le foyer image F_i .
- Un rayon incident passant par le foyer objet F_o ressort du dioptre parallèlement à l'axe optique.

Autres formules de conjugaison On peut exprimer la relation liant les positions de l'objet A_o et de son image A_i en prenant d'autres références que le sommet du dioptre. Par un raisonnement similaire à celui utilisé précédemment, on obtient la formule de conjugaison avec origine au centre :

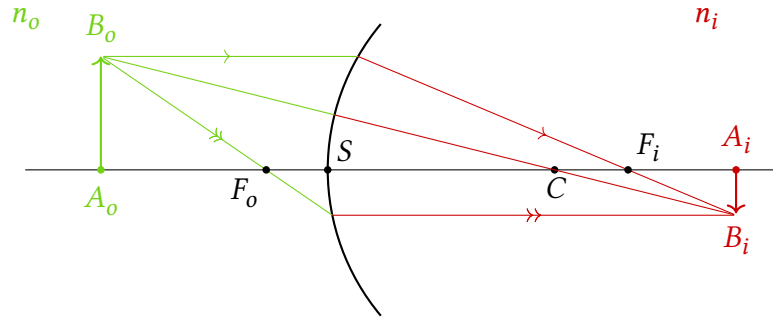


FIGURE 2.6 – Construction géométrique de l’image d’un objet en utilisant trois rayons particuliers.

$$\frac{n_o}{CA_i} - \frac{n_i}{CA_o} = \frac{n_i - n_o}{SC} \quad (2.2.7)$$

On peut également exprimer cette relation en prenant comme références les points focaux F_i et F_o . On peut exprimer le grandissement transversal γ de deux manières différentes en utilisant le théorème de Thalès (voir figure 2.6) :

$$\gamma = \frac{A_i B_i}{A_o B_o} = -\frac{f_o}{F_o A_o} = -\frac{\overline{F_i A_i}}{f_i} \quad (2.2.8)$$

La formule de Newton pour le dioptre sphérique s’écrit ainsi :

$$\overline{F_o A_o} \cdot \overline{F_i A_i} = f_i f_o \quad (2.2.9)$$

2.2.2 Miroir sphérique

Un *miroir sphérique* est une surface réfléchissante sphérique de centre C et de sommet S . Comme pour le dioptre sphérique, on appelle *rayon de courbure* la quantité algébrique $R = \overline{SC}$. Par convention, le sens positif est celui de la lumière incidente. Un miroir est dit *concave* si $R < 0$ et *convexe* si $R > 0$.

Formules de conjugaison Les formules de conjugaison du miroir sphérique peuvent être déduites de celles du dioptre sphérique en effectuant le changement : $n_i = -n_o = n$. Cela revient à dire que le milieu d’entrée et le milieu de sortie ont le même indice, et le signe « - » signifie que la lumière subit une réflexion et repart dans la direction opposée. Ainsi, on obtient avec origine au sommet :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{SA_i}} + \frac{1}{\overline{SA_o}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{\overline{SA_i}}{\overline{SA_o}}} \quad (2.2.10)$$

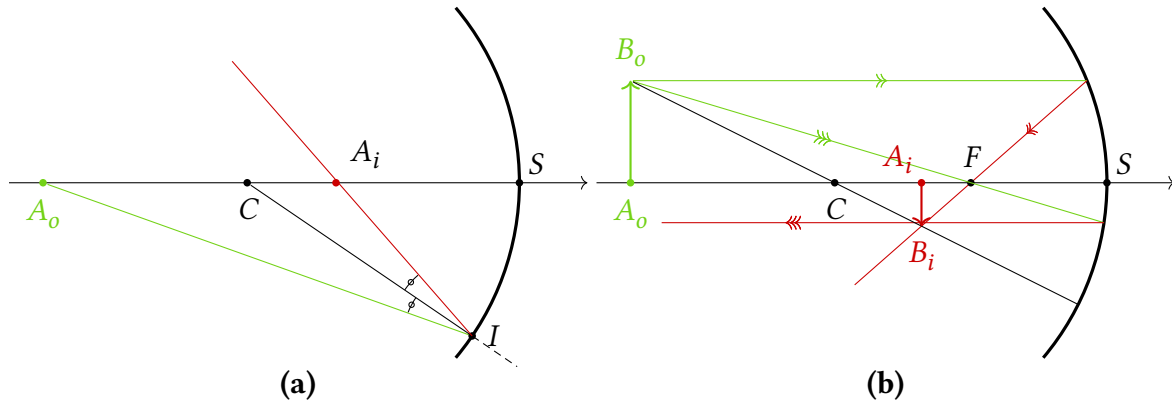


FIGURE 2.7 – Miroir sphérique : (a) Principe de démonstration des relations de conjugaisons à partir des lois de Snell-Descartes pour la réflexion. (b) Construction géométrique.

En prenant l'origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{CA_i}} + \frac{1}{\overline{CA_o}} = \frac{2}{\overline{CS}} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{\overline{CA_i}}{\overline{CA_o}} \quad (2.2.11)$$

Définitions

Vergence :

$$V = -\frac{2n}{\overline{SC}} \quad (2.2.12)$$

Un miroir concave ($\overline{SC} < 0$) est toujours convergent, un miroir convexe ($\overline{SC} > 0$) est toujours divergent.

$$\text{Foyer image : } \overline{SA_o} \rightarrow -\infty \quad \Rightarrow \quad f_i = \overline{SF_i} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

$$\text{Foyer objet : } \overline{SA_i} \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad f_o = \overline{SF_o} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Les foyers image et objet sont confondus et au milieu de SC. Les règles de construction d'une image sont les mêmes que pour le dioptre sphérique.

2.2.3 Lentilles minces

Une lentille est dite mince si son épaisseur est négligeable devant les rayons de courbure de ses faces : $e \ll |R_1|$, $e \ll |R_2|$, $e \ll |R_1 - R_2|$, avec R_1 et R_2 les rayons de courbure des deux faces, et e l'épaisseur de la lentille. Dans l'approximation de Gauss, les lentilles minces convergentes et divergentes sont représentées comme sur la figure 2.8.

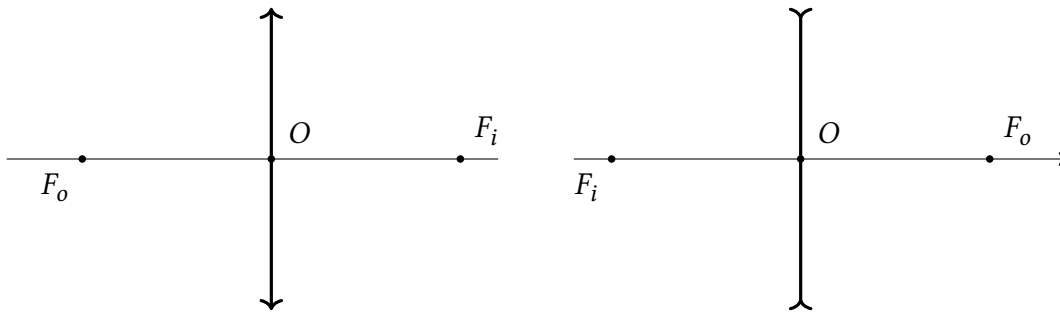


FIGURE 2.8 – Représentations des lentilles minces convergentes et divergentes.

Formule de conjugaison La formule de conjugaison des lentilles est très proche de celle des dioptries sphériques :

$$\boxed{\frac{1}{OA_i} - \frac{1}{OA_o} = V} \quad (2.2.13)$$

Foyers Les foyers objet F_o et image F_i sont symétriques par rapport au centre optique O :

$$\boxed{\overline{OF_o} = f_o \quad \overline{OF_i} = f_i \quad f_i = -f_o = \frac{1}{V}} \quad (2.2.14)$$

Pour une lentille convergente, on a $f_i > 0$, alors que pour une lentille divergente $f_i < 0$.

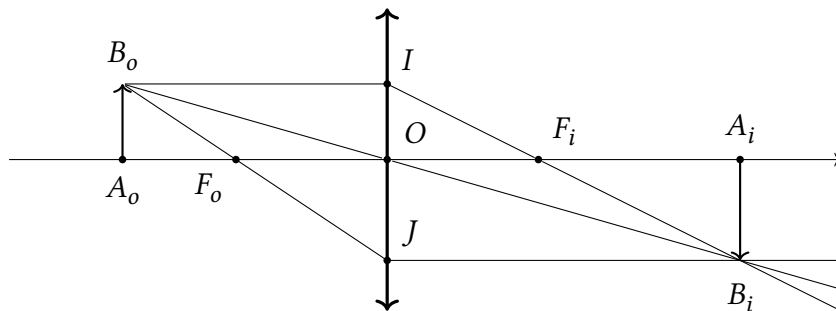


FIGURE 2.9 – Construction géométrique des images pour une lentille mince.

Grandissement On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{OA_i}}{\overline{OA_o}} = \frac{\overline{OB_i}}{\overline{OB_o}} = \frac{\overline{A_iB_i}}{\overline{A_oB_o}} \quad (2.2.15)$$

Le grandissement transversal vaut donc :

$$\gamma = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_o B_o}} = \frac{\overline{O A_i}}{\overline{O A_o}} \quad (2.2.16)$$

2.2.4 Foyers secondaires

On cherche une méthode géométrique pour déterminer le trajet d'un rayon lumineux quelconque passant dans un système optique dont on connaît les foyers.

On considère un rayon incident sur un point quelconque d'un système centré, avec un angle d'incidence quelconque. Pour déterminer son trajet après le système, on fait appel à la notion de *foyer secondaire* :

1. On trace un rayon (virtuel) passant par O (ou C pour un miroir ou un dioptre) et parallèle au rayon incident considéré. On parle d'*axe optique secondaire*.
2. Cet axe coupe le plan focal image au point *foyer image secondaire*.
3. Le rayon émergent correspondant au rayon incident passe par ce point foyer secondaire.

On se référera à la figure 2.10 pour la construction géométrique.

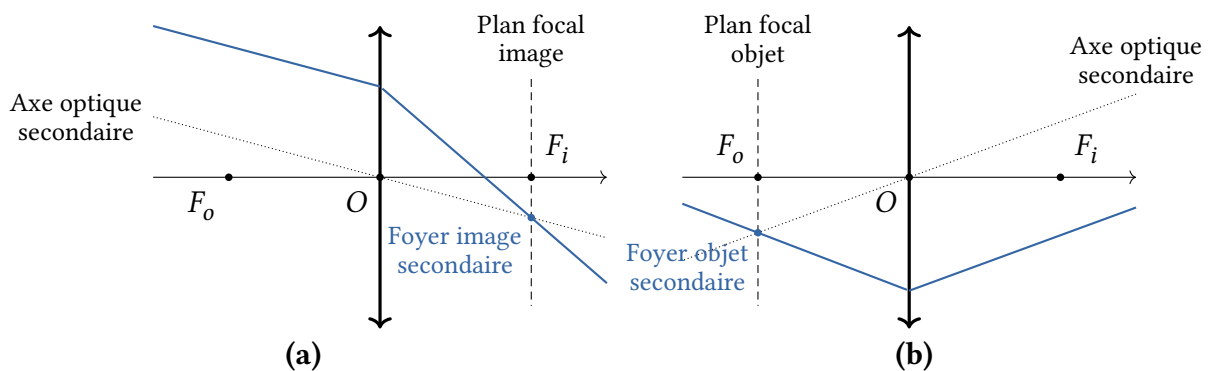


FIGURE 2.10 – Foyers secondaires image (a) et objet (b).

De même, pour un rayon émergent en un endroit quelconque, avec une incidence quelconque, on utilisera le *plan focal objet secondaire* :

1. On trace l'axe (virtuel) passant par O (ou C pour un miroir ou un dioptre) et parallèle au rayon émergent considéré : l'axe optique secondaire.
2. Cet axe coupe le plan focal objet au point *foyer objet secondaire*.
3. Le rayon incident correspondant au rayon émergent quelconque passe par ce point foyer secondaire.

3 Systèmes centrés dans l'approximation de Gauss

3.1 Exemple introductif

Nous venons de voir comment déterminer les trajets de rayons lumineux dans des systèmes optiques centrés simples (lentille, dioptré, miroir), en se basant sur la connaissance de leurs points focaux. Est-il possible de faire de même pour un système plus complexe, qui serait constitué de plusieurs éléments ?

On considère le système centré de la figure 3.1, constitué d'une première lentille divergente L_1 suivie d'une deuxième lentille convergente L_2 , séparées d'une distance e . On cherche à déterminer le point focal image, s'il existe de l'ensemble de ces deux lentilles. Pour cela, on trace le trajet d'un rayon incident parallèle à l'axe optique.

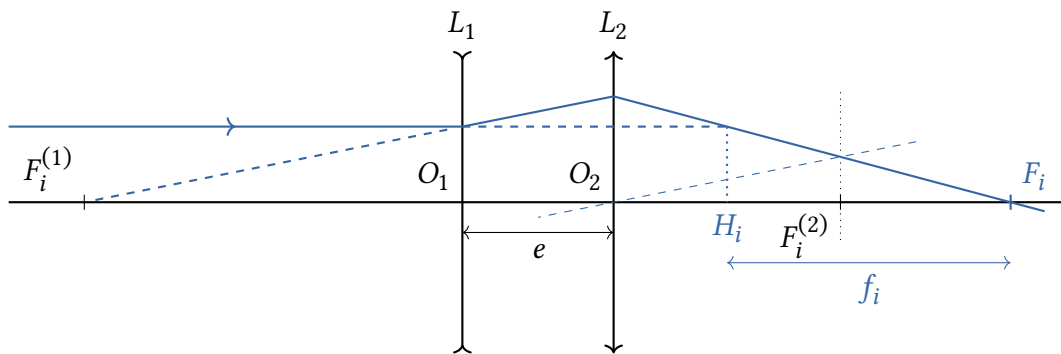


FIGURE 3.1 – Exemple d'un système optique centré formé de deux lentilles minces de vergences différentes mais de même axe optique. On trace le trajet d'un rayon lumineux arrivant parallèlement à l'axe optique, ce qui fait apparaître deux points particuliers : H_i et F_i .

Le rayon émergent du système constitué des deux lentilles croise l'axe optique, comme dans le cas d'un système simple : c'est le foyer image du système F_i . Le rayon a cependant subi deux réfractions, et si on voulait remplacer l'ensemble de ces deux lentilles par une seule, il faudrait la positionner au point appelé H_i sur la figure 3.1. Nous allons voir dans la suite que la donnée de ces deux points et de leurs homologues objet H_o et F_o permet de définir entièrement un système optique centré *quelconque*, et ainsi de tracer n'importe quel rayon le traversant.

3.2 Systèmes centrés

3.2.1 Éléments cardinaux

Les éléments cardinaux d'un système optique sont un ensemble de points et de plans dont la connaissance permet une détermination complète des propriétés du système. 4 d'entre eux seulement sont nécessaires pour déterminer entièrement le système optique, et dans la plupart des cas nous nous contenterons des points focaux et des points principaux. Ce sont eux qui permettent de déterminer le trajet des rayons lumineux au travers du système.

Points et plans focaux En général, un système centré possède deux points particuliers appelés *foyers* sur son axe principal :

- Le *foyer image*, noté F_i , est le point de rencontre des rayons lumineux conjugués des rayons incidents parallèles à l'axe. Il s'agit donc de l'image d'un objet situé à l'infini dans la direction de l'axe principal.
- Le *foyer objet*, noté F_o , est le point de rencontre des rayons conjugués des rayons émergents parallèles à l'axe. Il s'agit donc de la position d'un objet dont l'image est à l'infini dans la direction de l'axe principal.

Les foyers peuvent être réels ou virtuels, suivant s'ils sont effectivement dans leur milieu extrême respectif.

Un système est dit *afocal* si ses foyers sont à l'infini.

On définit les plans focaux objet et image comme les plans perpendiculaires à l'axe principal passant par les foyers objet et image, respectivement.

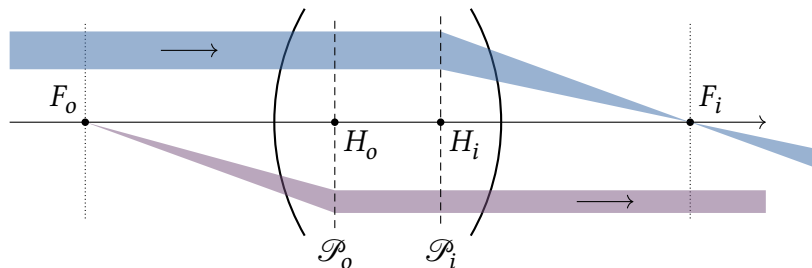


FIGURE 3.2 – Système centré et ses définitions : un faisceau parallèle à l'axe optique incident sur le système émerge à partir du plan principal image \mathcal{P}_i en direction du point focal F_i . Un faisceau issu du foyer objet F_o émerge à partir du plan principal \mathcal{P}_o et se propage parallèlement à l'axe optique.

Points et plans principaux Les *plans principaux* objet \mathcal{P}_o et image \mathcal{P}_i sont les plans conjugués dont le grandissement linéaire est +1. Ainsi, si un objet A_oB_o est positionné dans le plan principal objet \mathcal{P}_o , alors son image A_iB_i est dans le plan principal image \mathcal{P}_i . De plus, l'image est droite et le grandissement transversal vaut +1 : $\gamma = \overline{A_iB_i}/\overline{A_oB_o} = +1$.

Les intersections des plans principaux avec l'axe optique constituent les *points principaux* objet H_o et image H_i . Ces notions sont récapitulées en figure 3.2.

Points et plans anti-principaux De manière similaire aux plans principaux, les *plans anti-principaux* sont les plans conjugués de grandissement -1 : un objet placé dans le plan anti-principal objet \mathcal{K}_o a une image dans le plan anti-principal image \mathcal{K}_i et le grandissement transversal γ est égal à -1 . Les points anti-principaux sont les intersections des plans anti-principaux avec l'axe optique.

On montre que les plans anti-principaux sont les symétriques des plans principaux par rapport aux foyers.

Points nodaux Les points nodaux objet N_o et image N_i sont deux points conjugués de l'axe optique tels que tout rayon incident passant par N_o émerge du système en passant par N_i parallèlement à sa direction incidente (voir figure 3.3).

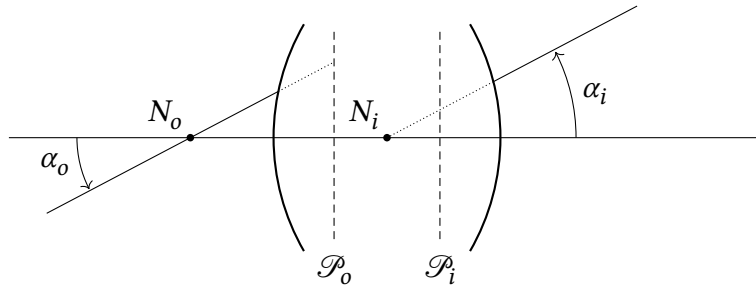


FIGURE 3.3 – Définition des points nodaux : $\alpha_i = \alpha_o$.

3.2.2 Construction des images

Principe On considère un système centré défini par ses foyers F_o et F_i et ses plans principaux \mathcal{P}_o et \mathcal{P}_i .

- À partir du point B_o d'un objet, on trace un rayon parallèle à l'axe. Il coupe le plan principal objet \mathcal{P}_o en I_o , puis le plan principal image \mathcal{P}_i en I_i en suivant une trajectoire parallèle à l'axe optique. Le rayon émerge alors de \mathcal{P}_i pour couper l'axe optique au foyer image F_i .
- Le rayon issu de B_o passant par le foyer objet F_o coupe le plan principal objet \mathcal{P}_o au point J_o , et se propage parallèlement à l'axe optique pour couper le plan principal image \mathcal{P}_i au point J_i . De là, il continue son trajet parallèlement à l'axe optique.

Ce principe de construction géométrique est repris graphiquement en figure 3.4.

Foyers secondaires Si on souhaite tracer le trajet d'un rayon incident quelconque passant par un point I_o du plan principal objet, on commence par tracer la parallèle à ce rayon passant par le point focal objet F_o . Ce rayon virtuel coupe le plan principal objet en K_o , et poursuit son chemin *parallèlement à l'axe optique* en coupant le plan principal image en K_i . Ce rayon couperait alors le plan focal image au *foyer image secondaire* F_i^s . Le rayon émergent correspondant au rayon incident donné est alors le rayon émergent $I_i F_i^s$. Cette construction est réalisée en figure 3.5 (a).

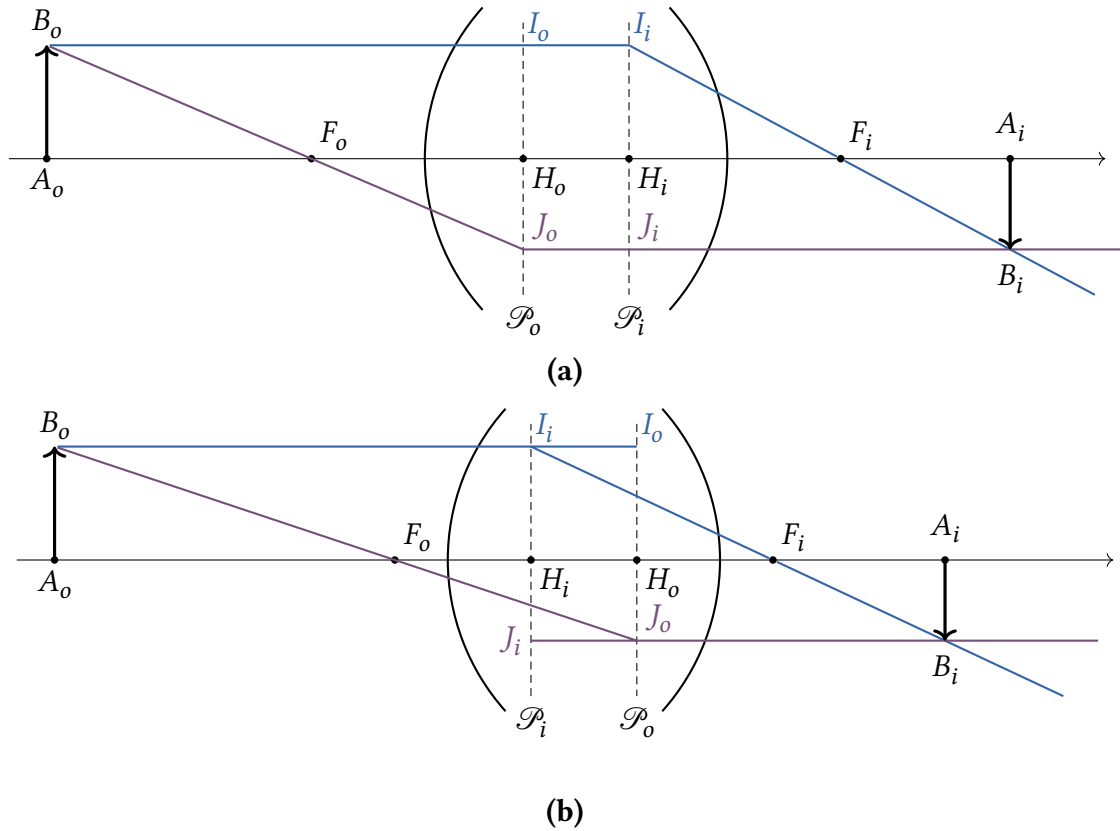


FIGURE 3.4 – Construction géométrique des images dans un système centré. Dans le cas (a), le plan principal objet est avant le plan principal image, alors que dans le cas (b) il est situé en arrière du plan principal image.

Si on souhaite cette fois tracer le rayon incident correspondant à un rayon émergent quelconque passant par un point I_i du plan principal objet, on trace la droite passant par le foyer image F_i et parallèle au rayon émergent considéré. Ce rayon virtuel rencontre le plan principal image en K_i , et provient du point K_o situé dans le plan principal objet et correspondant à un rayon incident parallèle à l'axe optique. Ce rayon coupe le plan principal objet au *foyer objet secondaire* F_o^s . Le rayon incident recherché est alors le rayon $F_o^s I_o$. Cette construction est réalisée en figure 3.5 (b).

3.2.3 Distances focales et vergence

On définit la vergence et les distances focales d'un système centré :

$$\boxed{f_o = \overline{H_o F_o} \quad f_i = \overline{H_i F_i} \quad V = \frac{n_i}{f_i} = -\frac{n_o}{f_o}} \quad (3.2.1)$$

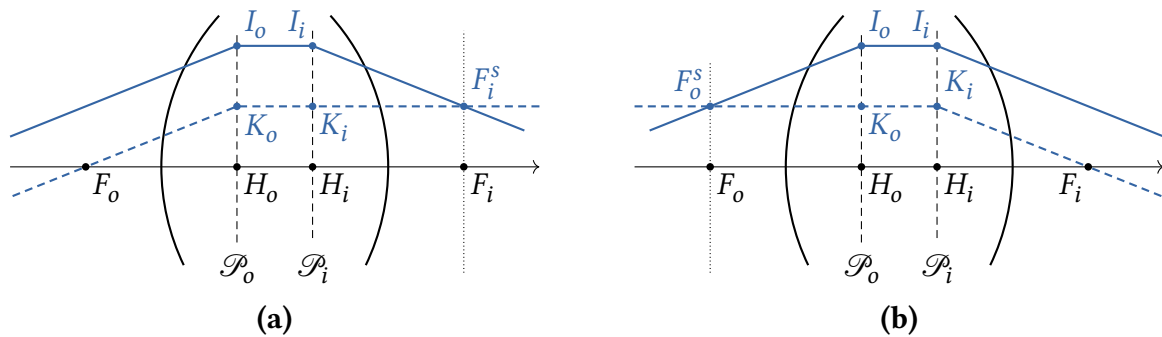


FIGURE 3.5 – Constructions géométriques (a) pour un rayon incident quelconque, (b) pour un rayon émergent quelconque.

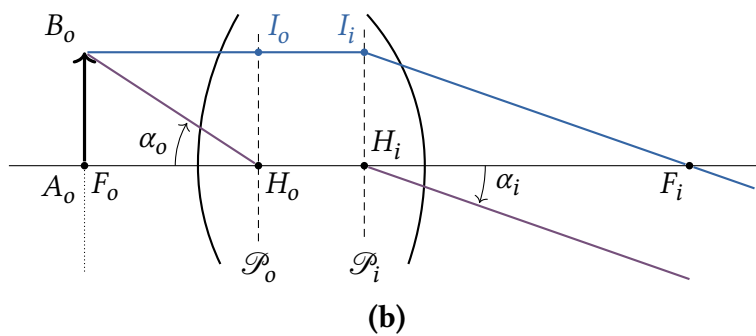


FIGURE 3.6 – Relations entre les distances focales d'un système centré.

3.2.4 Relations de conjugaison et grandissement

Origines aux points focaux On se place dans la situation décrite dans la figure 3.7. D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{\overline{A_o B_o}}{\overline{A_i B_i}} = \frac{\overline{A_o B_o}}{\overline{H_o J_o}} = \frac{\overline{F_o A_o}}{\overline{F_o H_o}} = \frac{\overline{H_i I_i}}{\overline{A_i B_i}} = \frac{\overline{F_i H_i}}{\overline{F_i A_i}} \quad (3.2.2)$$

Ce qui nous intéresse ici, c'est ce qui fait intervenir les positions de l'objet et de l'image, et les distances focales :

$$\frac{\overline{F_o A_o}}{\overline{F_o H_o}} = \frac{\overline{F_i H_i}}{\overline{F_i A_i}} \quad (3.2.3)$$

soit :

$$\boxed{\overline{F_o A_o} \cdot \overline{F_i A_i} = f_o f_i} \quad (3.2.4)$$

Cette relation est la *relation de conjugaison avec origines aux foyers*, également appelée *relation de Newton*.

En utilisant à nouveau le théorème de Thalès, on obtient pour le grandissement transversal :

$$y = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_o B_o}} = \frac{\overline{F_i A_i}}{\overline{F_i H_i}} = -\frac{\overline{F_i A_i}}{f_i} = \frac{\overline{F_o H_o}}{\overline{F_o A_o}} = -\frac{f_o}{\overline{F_o A_o}} \quad (3.2.5)$$

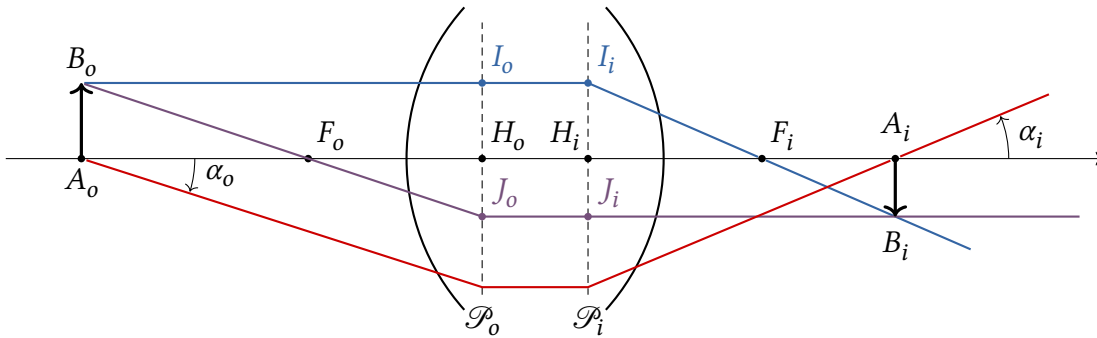


FIGURE 3.7 – Système et notations utilisés pour la démonstration de la relation de conjugaison avec origine aux foyers.

Origines aux points principaux

Démonstration de la relation de conjugaison avec origine aux points principaux.

$$\boxed{\frac{n_i}{\overline{H_i A_i}} - \frac{n_o}{\overline{H_o A_o}} = V} \quad (3.2.6)$$

Cette relation est la *relation de conjugaison avec origines aux points principaux*, également appelée *relation de Descartes*. On remarque qu'elle est très similaire à la relation de conjugaison avec origine au centre d'un dioptre sphérique ou d'une lentille.

Comme précédemment, on peut déterminer le grandissement transversal de manière géométrique :

$$\gamma = \frac{n_o \overline{H_i A_i}}{n_i \overline{H_o A_o}} \quad (3.2.7)$$

3.2.5 Positions relatives des points nodaux et principaux

On introduit le grandissement angulaire $G_a = \alpha_i/\alpha_o$, et on peut montrer que :

$$\gamma G_a = \frac{n_o}{n_i} \quad (3.2.8)$$

Par définition des points nodaux, le grandissement angulaire γ est nul : $G_a = 1$. En appliquant la relation du grandissement transversal aux points nodaux N_o et N_i , on obtient :

$$\gamma = \frac{n_o}{n_i} = \frac{n_o \overline{H_i N_i}}{n_i \overline{H_o N_o}} \quad (3.2.9)$$

ce qui implique donc que $\overline{H_i N_i} = \overline{H_o N_o}$. En utilisant la relation de conjugaison aux points principaux, on obtient :

$$\overline{H_o N_o} = \overline{H_i N_i} = f_o + f_i \quad (3.2.10)$$

Lorsque les milieux extrêmes sont identiques, on a alors $f_o = -f_i$ et par conséquent $\overline{H_o N_o} = \overline{H_i N_i} = 0$: *les points nodaux sont alors confondus avec les points principaux*.

On peut également écrire que :

$$\overline{H_o H_i} = \overline{H_o N_o} + \overline{N_o N_i} + \overline{N_i H_i} \quad (3.2.11)$$

ce qui devient :

$$\overline{H_o H_i} = \overline{N_o N_i} \quad (3.2.12)$$

On retiendra que *la donnée des points focaux et principaux suffit à déterminer les positions des points nodaux*.

3.3 Association de systèmes centrés

On considère deux systèmes centrés Σ_1 et Σ_2 ayant le même axe principal et caractérisés par :

- Leurs foyers objet $F_o^{(1)}$ et $F_o^{(2)}$, et image $F_i^{(1)}$ et $F_i^{(2)}$.
- Leurs points principaux objet $H_o^{(1)}$ et $H_o^{(2)}$, et image $H_i^{(1)}$ et $H_i^{(2)}$.

- Leurs distances focales objet $f_o^{(1)} = \overline{H_o^{(1)}F_o^{(1)}}$ et $f_o^{(2)} = \overline{H_o^{(2)}F_o^{(2)}}$, et image $f_i^{(1)} = \overline{H_i^{(1)}F_i^{(1)}}$ et $f_i^{(2)} = \overline{H_i^{(2)}F_i^{(2)}}$.

On considère que les milieux extrêmes dans lesquels baigne le 1^{er} système ont pour indices n_o et n , et pour le 2^e système, les milieux extrêmes ont pour indices n et n_i . L'ensemble des deux systèmes est caractérisé par la position du 2^e système par rapport au 1^{er} : elle est déterminée par l'*intervalle optique*, c'est à dire la distance entre le foyer image du premier système et le foyer objet du deuxième système :

$$\Delta = \overline{F_i^{(1)}F_o^{(2)}} \quad (3.3.1)$$

On définit d'autre part l'*épaisseur du système* comme la distance entre le point principal image du 1^{er} système et le point principal objet du 2^e système. :

$$e = \overline{H_i^{(1)}H_o^{(2)}} \quad (3.3.2)$$

Ces notations sont rassemblées en figure 3.8.

On cherche ici à caractériser le système global composé de l'association de Σ_1 et Σ_2 à partir des connaissances que l'on a sur chacun de ces deux systèmes pris séparément, et de l'intervalle optique. Un système centré est entièrement caractérisé lorsqu'on connaît 2 couples d'éléments cardinaux ((H_o, H_i) et (N_o, N_i) , par exemple), ou un couple et une distance focale. En pratique, on cherchera souvent à déterminer la vergence du système et la position de ses points principaux.

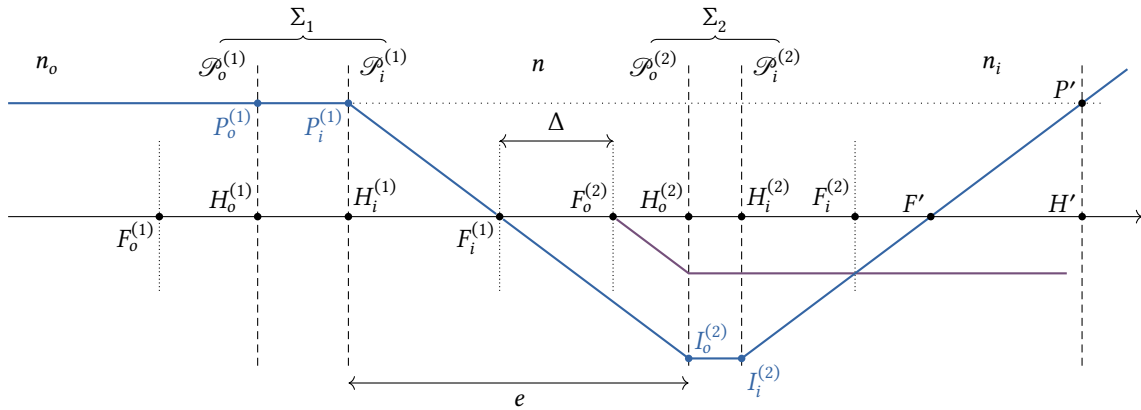


FIGURE 3.8 – Schéma et notations de l'association de deux systèmes optiques centrés. Le trajet optique représenté permet le calcul de la position du foyer image et du plan principal image.

Foyer image du système Par définition, le foyer image du système global est l'image d'un point à l'infini dans la direction de l'axe. Par conséquent, F' est l'image de $F_i^{(1)}$ à travers le système Σ_2 :

$$\infty \xrightarrow{\Sigma_1} F_i^{(1)} \xrightarrow{\Sigma_2} F' \quad (3.3.3)$$

On applique la formule de Newton pour Σ_2 :

$$\overline{F_o^{(2)}F_i^{(1)}} \cdot \overline{F_i^{(2)}F'} = f_o^{(2)} f_i^{(2)} \quad (3.3.4)$$

La position de F' est donc donnée par :

$$\boxed{\overline{F_i^{(2)}F'} = -\frac{f_o^{(2)} f_i^{(2)}}{\Delta}} \quad (3.3.5)$$

Plan principal image On utilise les notations de la figure 3.8 pour déterminer géométriquement la position du plan principal image.

Détermination de la position du point principal image H' .

On obtient :

$$\boxed{\overline{H'F'} = f' = -\frac{f_i^{(1)} f_i^{(2)}}{\Delta}} \quad (3.3.6)$$

Foyer objet du système Il s'agit par définition du point de l'axe optique dont l'image se trouve à l'infini :

$$F \xrightarrow{\Sigma_1} F_o^{(2)} \xrightarrow{\Sigma_2} \infty \quad (3.3.7)$$

$F_o^{(2)}$ est donc l'image de F à travers le 1^{er} système. On applique alors la formule de Newton pour le 1^{er} système :

$$\overline{F_o^{(1)}F} \cdot \overline{F_i^{(1)}F_o^{(2)}} = f_o^{(1)} f_i^{(1)} \quad (3.3.8)$$

On obtient donc :

$$\boxed{\overline{F_o^{(1)}F} = \frac{f_o^{(1)} f_i^{(1)}}{\Delta}} \quad (3.3.9)$$

Plan principal objet On se reporte à la figure 3.9 pour les notations. On peut alors écrire :

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{FH_o^{(1)}}} = \frac{\overline{HP}}{\overline{H_o^{(1)}I_o^{(1)}}} = \frac{\overline{H_o^{(2)}I_i^{(2)}}}{\overline{H_i^{(1)}I_i^{(1)}}} = \frac{\overline{F_o^{(2)}H_o^{(2)}}}{\overline{F_o^{(2)}H_i^{(1)}}} \quad (3.3.10)$$

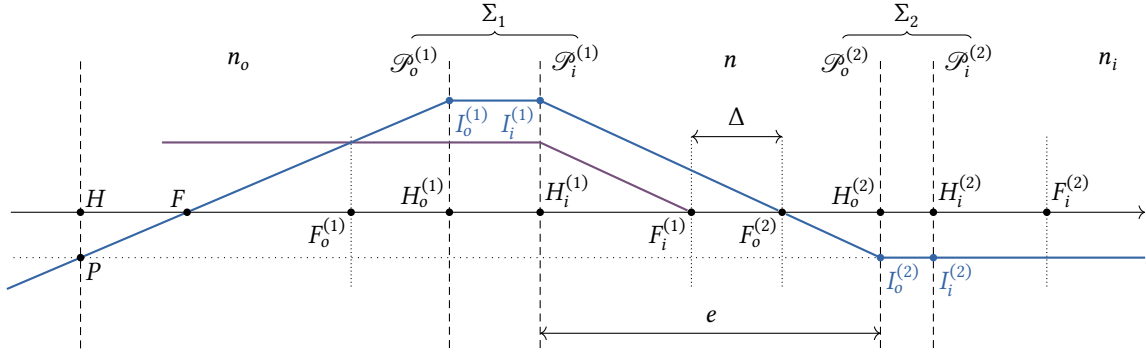


FIGURE 3.9 – Recherche du plan principal objet et du point focal objet dans une association de deux systèmes optiques centrés.

On en déduit donc :

$$\frac{\overline{HF}}{\overline{H_o^{(1)}F_o^{(1)}} + \overline{F_o^{(1)}F}} = \frac{f}{f_o^{(1)} + \frac{f_o^{(1)}f_i^{(1)}}{\Delta}} \quad (3.3.11)$$

$$= \frac{\overline{F_o^{(2)}H_o^{(2)}}}{\overline{F_o^{(2)}F_i^{(1)}} + \overline{F_i^{(1)}H_i^{(1)}}} = \frac{f_o^{(2)}}{f_i^{(1)} + \Delta} \quad (3.3.12)$$

Ainsi :

$$\boxed{\overline{HF} = f = \frac{f_o^{(1)}f_o^{(2)}}{\Delta}} \quad (3.3.13)$$

Vergence du système À partir des relations 3.3.6 et 3.3.13, on peut en déduire la vergence du système total :

$$V = \frac{n_i}{f'} = -\frac{n_o}{f} = -\frac{n_i\Delta}{f_i^{(1)}f_i^{(2)}} \quad (3.3.14)$$

Sachant que :

$$\Delta = \overline{F_i^{(1)}F_o^{(2)}} = \overline{F_i^{(1)}H_i^{(1)}} + \overline{H_i^{(1)}H_o^{(2)}} + \overline{H_o^{(2)}F_o^{(2)}} \quad (3.3.15)$$

$$= -f_i^{(1)} + e + f_o^{(2)} \quad (3.3.16)$$

on en déduit :

$$V = -\frac{n_i(e + f_o^{(2)} - f_i^{(1)})}{f_i^{(1)}f_i^{(2)}} = \frac{n_i}{f_i^{(2)}} - \frac{n_if_o^{(2)}}{f_i^{(1)}f_i^{(2)}} - \frac{n_ie}{f_i^{(1)}f_i^{(2)}} = \frac{n_i}{f_i^{(2)}} + \frac{nf_i^{(2)}}{f_i^{(1)}f_i^{(2)}} - \frac{n_ie}{f_i^{(1)}f_i^{(2)}} \quad (3.3.17)$$

Si on introduit les vergences respectives des deux systèmes :

$$V^{(1)} = -\frac{n_o}{f_o^{(1)}} = \frac{n}{f_i^{(1)}} \quad \text{et} \quad V^{(2)} = -\frac{n}{f_o^{(2)}} = \frac{n_i}{f_i^{(2)}} \quad (3.3.18)$$

il vient :

$$V = \frac{n_i}{f_i^{(2)}} + \frac{n}{f_i^{(1)}} - \frac{nn_i e}{nf_i^{(1)} f_i^{(2)}} \quad (3.3.19)$$

c'est-à-dire sous une forme condensée :

$$V = V^{(1)} + V^{(2)} - \frac{e}{n} V^{(1)} V^{(2)} \quad (3.3.20)$$

Cette relation est appelée *formule de Gullstrand*.

3.4 Exemple : lentille épaisse

3.4.1 Méthodologie

La méthode typique pour résoudre un problème d'optique géométrique portant sur un système centré constitué de 2 (ou plusieurs) systèmes simples est la suivante :

1. Rassembler les caractéristiques des deux systèmes : indices des milieux (n_o , n et n_i), vergences $V^{(1,2)}$, positions des foyers objet $F_o^{(1,2)}$ et image $F_i^{(1,2)}$, positions des points principaux objet $H_o^{(1,2)}$ et image $H_i^{(1,2)}$, épaisseur optique $e = \overline{H_i^{(1)} H_o^{(2)}}$ et intervalle optique $\Delta = \overline{F_i^{(1)} F_o^{(2)}}$.
2. Calculer la vergence du système entier V en utilisant la formule de Gullstrand 3.3.20. On retrouve les longueurs focales avec $V = n_i/f_i = -n_o/f_o$ et on sait si le système est convergent, divergent ou afocal.
3. Trouver les positions des points focaux en utilisant les deux formules de Newton 3.3.9 et 3.3.5. La connaissance des distances focales $f_o = \overline{HF}$ et $f_i = \overline{H'F'}$ permet de retrouver la position des points principaux. Le système optique est alors entièrement décrit.
4. Appliquer les relations de conjugaison au système pour trouver la position d'une image, calculer un grandissement, ou construire graphiquement un tracé de rayon.

3.4.2 Lentille épaisse

Une lentille épaisse d'indice n travaillant dans l'air peut être considérée comme l'association de deux systèmes centrés simples, en l'occurrence deux dioptries sphériques de sommets S_1 et S_2 et de centres de courbures C_1 et C_2 (voir figure 3.10). Dans le cas d'un dioptré sphérique, les points principaux étant confondus avec le sommet, on définit l'épaisseur optique par la quantité $e = \overline{S_1 S_2}$. On pose également $R_1 = \overline{S_1 C_1}$ et $R_2 = \overline{S_2 C_2}$. On se propose alors de calculer les propriétés de la lentille complète.

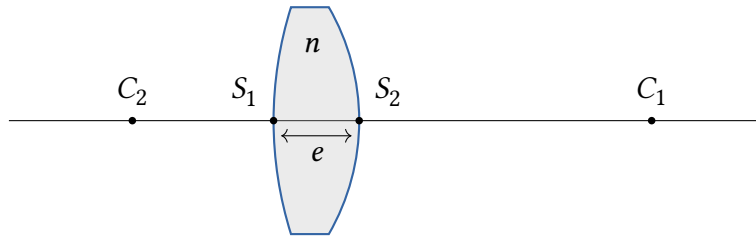


FIGURE 3.10 – Représentation d’une lentille épaisse composée de deux dioptries sphériques de sommets S_1 et S_2 et de centres C_1 et C_2 .

Q 3.4 - 1 Déterminer la vergence et les distances focales de chacun des dioptries sphériques.

Q 3.4 - 2 Calculer l’intervalle optique Δ en fonction des paramètres du problème.

Q 3.4 - 3 En utilisant les relations démontrées dans le cours et les réponses aux questions précédentes, calculer la vergence, les focales objet f et image f' de la lentille épaisse.

Q 3.4 - 4 En déduire les positions des foyers par rapport aux sommets de chaque dioptrie : $\overline{S_2F'}$ et $\overline{S_1F}$. Déterminer les positions des plans principaux toujours par rapport aux sommets de chaque dioptrie $\overline{S_2H'}$ et $\overline{S_1H}$.

Suivant le signe de la vergence, les lentilles sont soit convergentes ($V > 0$), soit divergentes ($V < 0$). On peut réaliser une lentille convergente de plusieurs manières différentes :

- Une lentille *biconvexe* est composée de deux dioptries convergentes ($R_1 > 0$ et $R_2 < 0$).
- Un *ménisque convergent* est tel que $V^{(1)} > 0$ et $V^{(2)} < 0$ avec $V > 0$.
- Une lentille *plan-convexe* dont le dioptrie de sortie est plan ($V^{(1)} > 0$ et $V^{(2)} = 0$).

De la même manière, une lentille divergente peut être réalisée de différentes manières différentes :

- Une lentille *biconcave* est composée de deux dioptries divergentes ($R_1 < 0$ et $R_2 > 0$).
- Un *ménisque divergent* est tel que $V^{(1)} > 0$ et $V^{(2)} < 0$ avec $V < 0$.
- Une lentille *plan-concave* dont le dioptrie de sortie est plan ($V^{(1)} < 0$ et $V^{(2)} = 0$).

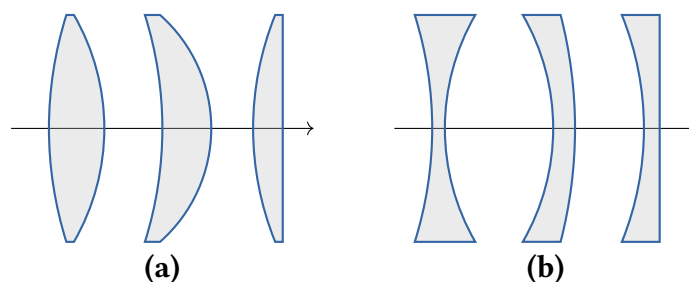


FIGURE 3.11 – Différents types de lentilles épaisses. (a) lentilles convergentes : lentille biconvexe, ménisque convergent et lentille plan-convexe. (b) lentilles divergentes : lentille biconcave, ménisque divergent et lentille plan-concave.

Lentille mince Une lentille est dite *mince* si son épaisseur e est faible comparée aux rayons R_1, R_2 et à leur différence $|R_1 - R_2|$:

$$e \ll R_1, R_2, |R_1 - R_2| \quad (3.4.1)$$

On peut alors supposer que S_1 et S_2 sont confondus avec le point O appelé *centre optique*, de même que les points principaux et les points nodaux. Les foyers objet et image sont alors symétriques par rapport au point O et sont situés à la distance $|f'|$ du centre. À partir des relations démontrées pour la lentille épaisse, on obtient leurs positions :

$$\overline{OF} = -\overline{OF'} = \frac{R_1 R_2}{(n - 1)(R_1 - R_2)} \quad (3.4.2)$$

La vergence de la lentille est donnée par la formule de Gullstrand 3.3.20 :

$$V = \frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.4.3)$$

Cette relation est connue sous le nom de *formule des opticiens* ou encore *des lunetiers*.

Dans le cas des lentilles minces, la relation de conjugaison de Descartes se simplifie en notant que H_o et H_i sont confondus avec O et que les milieux extrêmes sont identiques. On retrouve alors la formule déjà vue :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad (3.4.4)$$

A' étant l'image de A .

4 Optique matricielle

L'approximation de Gauss aboutit à une description *linéaire* de l'optique géométrique : pour des rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique, le sinus et la tangente (des fonctions *non linéaires*) des angles sont approximés par des fonctions linéaires : $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$. Le calcul matriciel étant extrêmement efficace pour traiter les problèmes linéaires, nous allons voir comment l'utiliser pour l'optique géométrique.

4.1 Définitions

4.1.1 Matrice colonne

Un rayon lumineux peut être entièrement décrit par deux éléments :

- le point A de coordonnées $(x, y, 0)$ correspondant à l'intersection du rayon avec le plan de référence (Oxy) ,
- et le vecteur unitaire \vec{u} donnant sa direction de propagation.

On note α l'angle (\vec{u}, \vec{u}_x) . Comme le rayon lumineux est peu incliné par rapport à l'axe, les coordonnées du vecteur unitaire \vec{u} sont :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \approx \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

L'angle α étant très petit, la norme du vecteur \vec{u} vaut $|\vec{u}| = \sqrt{1 + \alpha^2} \approx 1$, et \vec{u} peut effectivement bien être considéré comme un vecteur unitaire. Ces notations sont reprises en deux dimensions en figure 4.1.

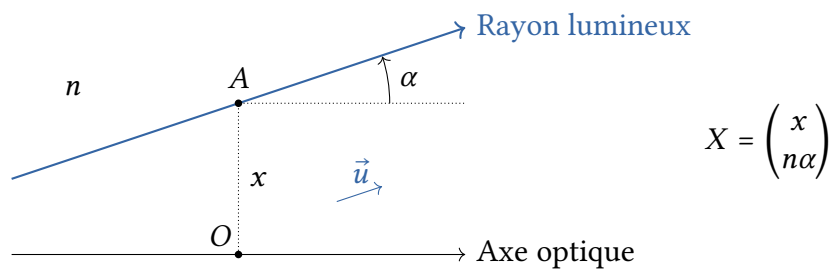


FIGURE 4.1 – Description d'un rayon lumineux par son intersection avec le plan Oxy et son vecteur unitaire \vec{u} .

Un rayon du plan Oxz est donc défini par les paramètres x et α . On associe à un rayon

lumineux la matrice colonne \underline{X} :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ n\alpha \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

où n est l'indice de réfraction du milieu et $n\alpha$ est appelé *angle optique*.

4.1.2 Matrice de transfert

On considère un système optique centré quelconque sur lequel arrive un rayon incident X_1 (voir figure 4.2).

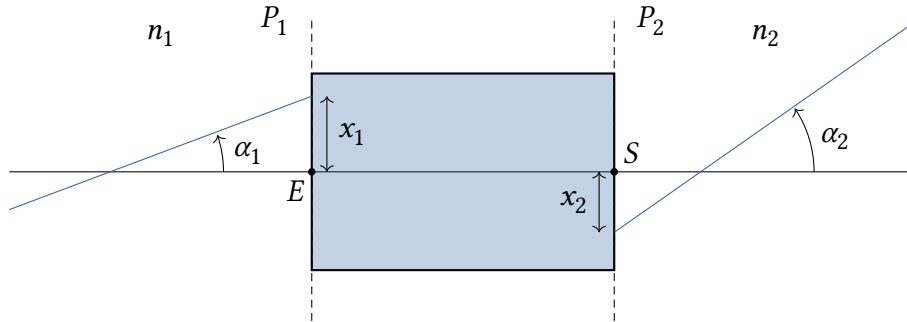


FIGURE 4.2 – Représentation d'un système optique par une matrice de transfert.

On aimerait pouvoir trouver le rayon émergent X_2 en utilisant une matrice de transfert T , de manière à avoir :

$$X_2 = TX_1 \quad (4.1.3)$$

Les rayons lumineux ayant deux coordonnées, la matrice T est une matrice 2×2 :

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad (4.1.4)$$

Dans ces conditions, la relation précédente s'écrit :

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

Ce qui se décompose en un système de 2 équations à 2 inconnues :

$$x_2 = T_{11}x_1 + T_{12}n_1\alpha_1 \quad (4.1.6)$$

$$n_2\alpha_2 = T_{21}x_1 + T_{22}n_1\alpha_1 \quad (4.1.7)$$

D'une manière générale, on appellera *matrice de transfert* une matrice faisant passer d'un plan de front d'entrée P_1 à un plan de front de sortie P_2 , un plan de front étant un plan quelconque perpendiculaire à l'axe optique. Nous allons chercher les matrices de transfert de deux cas particuliers fondamentaux : la propagation libre et le dioptre sphérique. Nous verrons le cas général d'un système centré quelconque ensuite.

4.1.3 Propagation libre

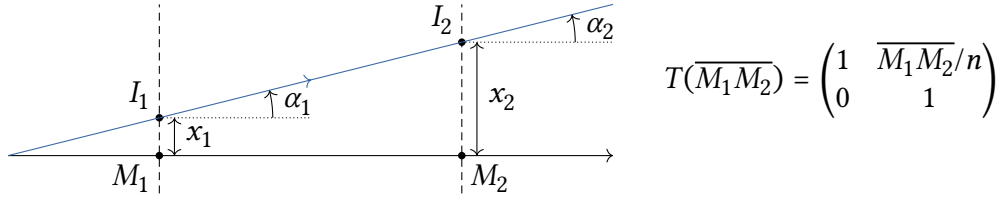


FIGURE 4.3 – Propagation libre d'un rayon lumineux et matrice de transfert.

On cherche la matrice de transfert du rayon incident X_1 au rayon émergent X_2 entre deux plans de front P_1 et P_2 situés dans un même milieu homogène d'indice n (voir figure 4.3). On appelle I_1 et I_2 les intersections de ce rayon avec les deux plans de front, et M_1 et M_2 les projections de I_1 et I_2 sur l'axe optique. Comme le rayon est peu incliné sur l'axe, on obtient facilement les relations suivantes :

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 \overline{M_1 M_2} \quad (4.1.8)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 \quad (4.1.9)$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ n\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{M_1 M_2}/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix} \quad (4.1.10)$$

soit, sous forme condensée $X_2 = \mathcal{T}(\overline{M_1 M_2})X_1$ où on a introduit la matrice de translation $\mathcal{T}(\overline{M_1 M_2})$:

$$\boxed{\mathcal{T}(\overline{M_1 M_2}) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{M_1 M_2}/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad (4.1.11)$$

On remarque que le déterminant de cette matrice est égale à 1 : $\det \mathcal{T}(\overline{M_1 M_2}) = 1$.

4.1.4 Dioptre sphérique et lentille mince

Lors de l'étude du dioptre sphérique, nous avons utilisé la relation suivante pour démontrer la relation de conjugaison du dioptre 2.2.1 :

$$n_1 \sin \alpha_1 - n_2 \sin \alpha_2 \approx n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2 = (n_1 - n_2) \frac{-x}{R} = Vx \quad (4.1.12)$$

avec $R = \overline{SC}$, $V = (n_2 - n_1)/R$ la vergence et $x = x_1 = x_2$ puisque les plans d'entrée et de sortie sont confondus avec le dioptre. Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$x_2 = x_1 \quad (4.1.13)$$

$$n_2 \alpha_2 = -Vx_1 + n_1 \alpha_1 \quad (4.1.14)$$

ce qui prend la forme matricielle suivante :

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ n_2 \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n_1 \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (4.1.15)$$

On peut donc définir la matrice $\mathcal{R}(S)$ de réfraction d'un dioptre sphérique à son sommet S par :

$$\boxed{\mathcal{R}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix}} \quad (4.1.16)$$

On admettra que la matrice de passage d'une lentille mince prise en son centre O est identique. On remarque également que le déterminant de cette matrice vaut 1 : $\det \mathcal{R}(S) = 1$.

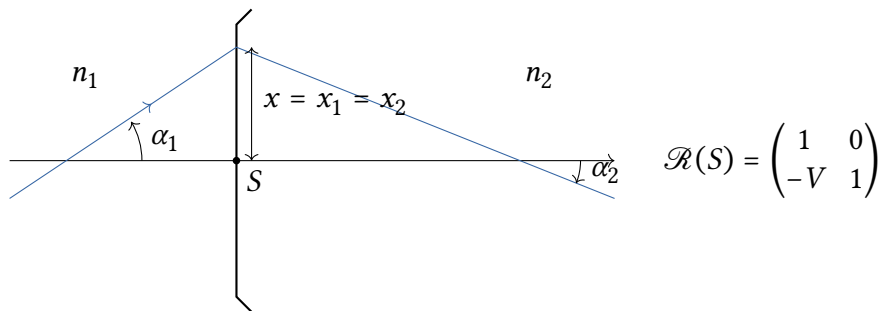


FIGURE 4.4 – Dioptre sphérique et détermination de sa matrice de transfert $\mathcal{R}(S)$.

4.1.5 Miroir sphérique

Commençons par rappeler qu'on choisit par convention d'orienter l'axe optique dans le sens de propagation de la lumière dans *tous* les cas. Ainsi, dans le cas du miroir, l'axe sera orienté positivement dans le sens de la lumière incidente avant réflexion, et dans le sens de la lumière émergente après réflexion : les espaces image et objet ont donc des orientations opposées.

La matrice de transfert d'un miroir sphérique est formellement identique à celle du dioptre sphérique en faisant $n_i = -n_o$:

$$\boxed{\mathcal{R}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{SC} & 1 \end{pmatrix}} \quad (4.1.17)$$

avec S le sommet du miroir et C son centre de courbure. La vergence du miroir est donc donnée par :

$$\boxed{V = -\frac{2n}{SC}} \quad (4.1.18)$$

4.1.6 Système centré quelconque

On considère maintenant un système centré constitué d'une succession de dioptries sphériques ou plans séparés par des milieux homogènes, comme représenté en figure 4.5. Ce système apparaît donc comme un enchaînement de réfractions et de propagations libres entre les dioptries. La matrice de transfert totale $T(\overline{ES})$ du système est obtenue en effectuant le *produit des matrices* de réfraction et de translations successives *dans l'ordre inverse de celui des éléments rencontrés par la lumière*. Le produit matriciel n'est en effet *pas commutatif* : en général $A \times B \neq B \times A$. Dans le cas de la figure 4.5, le passage de E à S s'écrit par la relation de Chasles :

$$\overline{ES} = \overline{EM} + \overline{MN} + \overline{NS} \quad (4.1.19)$$

et la matrice de transfert du système s'écrit :

$$T(\overline{ES}) = \mathcal{R}(S) \times \mathcal{T}(\overline{NS}) \times \mathcal{R}(N) \times \mathcal{T}(\overline{MN}) \times \mathcal{R}(M) \times \mathcal{T}(\overline{EM}) \times \mathcal{R}(E) \quad (4.1.20)$$

On observe que l'ordre des translations est inverse par rapport à la relation de Chasles, mais que les directions de chaque translation sont conservées.

Le déterminant de $T(\overline{ES})$ est là aussi égal à 1 puisqu'il s'agit d'un produit de matrices de déterminants tous égaux à 1.

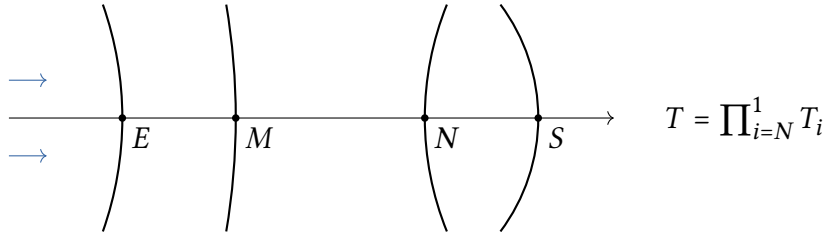


FIGURE 4.5 – Association de dioptries sphériques séparés par des intervalles optiques. La matrice de transfert totale est le produit des matrices de transfert des différents éléments, y compris les translations entre dioptries.

4.1.7 Vergence

On cherche à écrire la matrice de transfert $T(\overline{AB})$ entre deux plans de front Axy et Bxy (pas nécessairement images l'un de l'autre) respectivement situés dans l'espace objet d'indice n_1 et l'espace image d'indice n_2 d'un système optique. Les plans de front d'entrée et de sortie de ce système couplent l'axe optique en O_1 et O_2 , comme représenté en figure 4.6.

D'après ce que nous avons vu précédemment, la matrice de transfert de ce système s'écrit $T(\overline{AB}) = \mathcal{T}(\overline{O_2B}) \times T(\overline{O_1O_2}) \times \mathcal{T}(\overline{AO_1})$.

$$\begin{pmatrix} T_{11}(AB) & T_{12}(AB) \\ T_{21}(AB) & T_{22}(AB) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{O_2B}/n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \overline{AO_1}/n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.21)$$

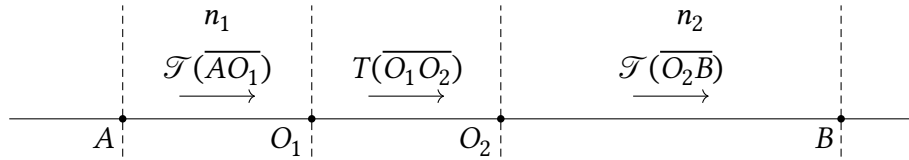


FIGURE 4.6 – Système centré d'étude pour la détermination de la vergence.

En effectuant le produit matriciel, il vient :

$$T_{11}(AB) = T_{11} + T_{21} \frac{\overline{O_2B}}{n_2} \quad T_{12}(AB) = T_{11} \frac{\overline{AO_1}}{n_1} + T_{12} + \frac{\overline{O_2B}}{n_2} \left(T_{21} \frac{\overline{AO_1}}{n_1} + T_{22} \right) \quad (4.1.22)$$

$$T_{21}(AB) = T_{21} \quad T_{22}(AB) = T_{22} + T_{21} \frac{\overline{AO_1}}{n_1} \quad (4.1.23)$$

On voit que parmi les 4 éléments de la matrice $T(\overline{AB})$, seul l'élément T_{21} est toujours indépendant du couple de points (A, B) choisi. Il est donc caractéristique du système centré, et il s'agit de sa *vergence* :

$$\boxed{T_{21} = -V} \quad (4.1.24)$$

On retrouve ce résultat dans le cas du dioptre sphérique où la vergence correspond bien à l'élément $\mathcal{R}_{21}(S)$ de la matrice de réfraction d'un dioptre ou d'une lentille.

4.1.8 Matrice de conjugaison

On cherche maintenant à écrire la matrice de transfert entre un objet A_o et son image A_i . Un schéma est donné en figure 4.7.

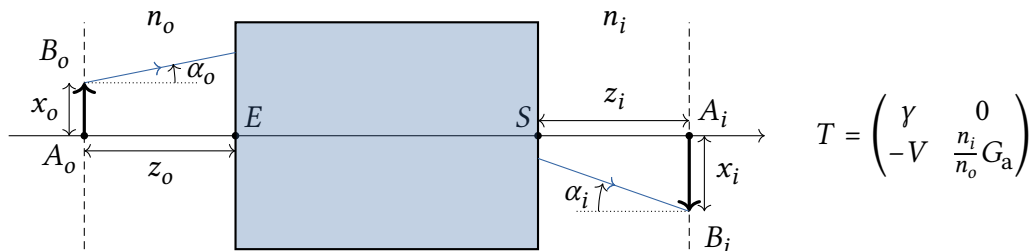


FIGURE 4.7 – Schéma et notations pour la détermination de la matrice de conjugaison.

Les points A_o et A_i (ainsi que les points B_o et B_i) sont images l'un de l'autre à travers le système optique : tous les rayons issus de A_o (resp. B_o) doivent converger vers A_i (resp. B_i) quelles que soient leurs inclinaisons. Cette information va nous suffire pour déterminer la matrice de passage de A_o à A_i , que nous écrivons ainsi :

$$\begin{pmatrix} x_i \\ n_i \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_o \\ n_o \alpha_o \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_i & = T_{11} x_o + T_{12} n_o \alpha_o \\ n_i \alpha_i & = T_{21} x_o + T_{22} n_o \alpha_o \end{cases} \quad (4.1.25)$$

Comme tous les rayons issus de B_o doivent passer au point B_i , x_i doit nécessairement être constant quelque soit l'angle α_o :

$$x_i \text{ indépendant de } \alpha_o \quad \Rightarrow \quad T_{12} = 0 \quad (4.1.26)$$

L'ordonnée x_i du point B_i est donc égale à $x_i = T_{11}x_o$, de sorte que :

$$T_{11} = \frac{x_i}{x_o} = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_o B_o}} = \gamma \quad (4.1.27)$$

où γ correspond au grandissement transversal.

Si on considère maintenant les points conjugués A_o et A_i , on a $x_o = x_i = 0$. On doit donc avoir $n_i \alpha_i = T_{22} n_o \alpha_o$, et on trouve donc pour T_{22} :

$$T_{22} = \frac{n_i \alpha_i}{n_o \alpha_o} = \frac{n_i}{n_o} G_a \quad (4.1.28)$$

avec G_a le grandissement angulaire. Le déterminant de la matrice T doit toujours valoir 1, de sorte qu'on doit aussi avoir :

$$T_{22} = \frac{1}{\gamma} = \frac{n_i}{n_o} G_a \quad (4.1.29)$$

Finalement, la matrice de transfert entre deux éléments conjugués est dite *matrice de conjugaison* et s'écrit :

$$T(\overline{A_o A_i}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ -V & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o} G_a \end{pmatrix} \quad (4.1.30)$$

4.1.9 Plans principaux et nodaux

Par définition, les plans principaux objet et image sont conjugués à travers le système tels que le grandissement transversal est égal à 1 : $\gamma = 1$. La matrice de conjugaison entre plans principaux s'écrit donc :

$$T(\overline{H_o H_i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.31)$$

De même, la matrice des plans nodaux s'obtient en remarquant que N_o et N_i sont conjugués et que le grandissement angulaire vaut 1, de sorte que :

$$T(\overline{N_o N_i}) = \begin{pmatrix} \frac{n_o}{n_i} & 0 \\ -V & \frac{n_i}{n_o} \end{pmatrix} \quad (4.1.32)$$

4.2 Utilisation des matrices

L'utilisation des matrices de transfert permet de retrouver efficacement et rapidement les points cardinaux d'un système optique centré, et également de calculer des positions d'image, des trajets de rayons ou des grandissements.

4.2.1 Relation de conjugaison

On considère un système optique dont on connaît la vergence V et la position de ses points principaux H_o et H_i ; la connaissance des indices des milieux objet et image (n_o et n_i) implique donc que le système est entièrement décrit. On cherche à retrouver la relation de conjugaison liant la position d'un objet A_o à celle de son image A_i par ce système.

Q 4.2 - 1 Exprimer la matrice $T(\overline{A_o A_i})$ en fonction du grandissement γ et de la vergence du système optique.

Q 4.2 - 2 Exprimer la matrice $T(\overline{H_o H_i})$ de passage entre les plans principaux.

Q 4.2 - 3 Exprimer la matrice $T(\overline{A_o A_i})$ comme association d'une translation entre A_o et H_o , puis d'un passage à travers le système optique, puis d'une translation entre H_i et A_i .

En identifiant les deux matrices, on obtient alors les relations :

$$\frac{n_i}{H_i A_i} - \frac{n_o}{H_o A_o} = V \quad \gamma = \frac{n_o \overline{H_i A_i}}{n_i \overline{H_o A_o}} \quad (4.2.1)$$

On retrouve ainsi la relation de conjugaison avec origines aux points principaux et l'expression du grandissement.

4.2.2 Association de deux systèmes centrés

La figure 4.8 représente l'association de deux systèmes centrés (Σ_1) et (Σ_2) caractérisés par leurs points principaux objet $H_o^{(1)}$ et $H_o^{(2)}$, et image $H_i^{(1)}$ et $H_i^{(2)}$. L'indice du milieu objet est n_o , celui du milieu image n_i , et celui du milieu séparant les deux systèmes est n . On note l'épaisseur optique $e = \overline{H_i^{(1)} H_o^{(2)}}$ et V_1 et V_2 les vergences respectives.

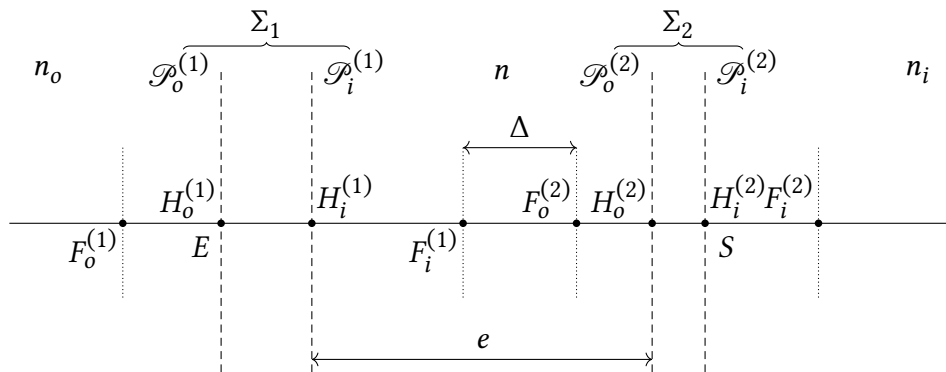


FIGURE 4.8 – Association de deux systèmes centrés.

On souhaite déterminer les éléments cardinaux de l'ensemble ($\Sigma_1 + \Sigma_2$) en utilisant le formalisme matriciel.

Q 4.2 - 4 Écrire la matrice de transfert $T(\overline{H_o^{(1)}H_i^{(2)}})$ permettant de passer à travers le système entier comme un produit de trois matrices.

Q 4.2 - 5 En déduire l'expression de la vergence totale du système, et retrouver une formule déjà connue.

Q 4.2 - 6 Il nous faut maintenant déterminer la position des points principaux. Pour cela, exprimer la matrice de passage $T(\overline{H_oH_i})$ entre les points principaux objet et image du système global de deux manières différentes : une première fois en utilisant directement la définition du cours, et une deuxième fois en utilisant un produit matriciel.

Q 4.2 - 7 En procédant par identification, déterminer la position des points principaux.

Le système global est ainsi entièrement caractérisé.

4.2.3 Exemple : lentille épaisse

On reprend le cas de la lentille épaisse, formée de deux dioptries sphériques de sommets S_1 et S_2 , de centres de courbure C_1 et C_2 , et séparés par un intervalle optique $e = \overline{S_1S_2}$. La lentille est plongée dans l'air et l'indice du milieu intermédiaire vaut n . On cherche à déterminer le système optique constitué de l'association de ces deux dioptries, c'est-à-dire à déterminer ses longueurs focales, points focaux et points principaux. On va retrouver le résultat vu précédemment en utilisant l'optique matricielle.

Q 4.2 - 8 Exprimer la matrice de transfert du système complet $T(\overline{S_1S_2})$ en fonction de celles des dioptries 1 et 2 notées $\mathcal{R}(S_1)$ et $\mathcal{R}(S_2)$. On notera $\mathcal{T}(\overline{S_1S_2})$ la matrice de propagation libre entre S_1 et S_2 .

Q 4.2 - 9 Donner les expressions de $\mathcal{R}(S_1)$, $\mathcal{R}(S_2)$ et $\mathcal{T}(\overline{S_1S_2})$.

Q 4.2 - 10 Calculer la matrice globale $T(\overline{S_1S_2})$. Que vaut la vergence du système ?

Q 4.2 - 11 On appelle H_o et H_i les points principaux objet et image du système. Exprimer la matrice de conjugaison entre H_o et H_i par le système complet de deux manières différentes.

Q 4.2 - 12 Calculer ces matrices et déterminer les positions de H_o et H_i . En déduire la position des foyers objet $\overline{S_1F_o}$ et images $\overline{S_2F_i}$.

Q 4.2 - 13 L'optique matricielle est particulièrement puissante pour calculer des trajets de rayons. Dans ce cas, on s'intéresse à un rayon tapant sur la lentille S_1 à une hauteur x et avec un angle α . Donner la matrice colonne X de ce rayon lumineux au niveau de S_1 .

Q 4.2 - 14 On cherche à savoir ce que devient ce rayon après être passé au travers de la lentille, en un point C tel que $\overline{S_2C} = (n - eV_1)/nV$. Déterminer la matrice de passage $T(\overline{S_1C})$ et calculer la matrice colonne du rayon émergent X' correspondant au rayon incident X . Que remarque-t-on quant à la position x' du rayon ? Conclure.