# I Dipôle électrique, ciel bleu et polarisation naturelle

## Introduction

Les astronautes qui ont eu la chance de poser le pied sur la Lune ont pu contempler un ciel complètement noir, comme le montre la photographie (en couleur) prise par les membres de l'équipage d'Apollo 17 (figure 1). En fait, le ciel est noir sur toutes les planètes sans atmosphère. Le but de cet exercice est de montrer pourquoi l'atmosphère terrestre majoritairement composée d'azote nous apparaît bleu.

Figure 1 – Photographie couleur prise sur la Lune par l'un des astronautes de la mission Apollo 17 (NASA).

D'autre part, nous verrons aussi pourquoi la lumière du ciel est partiellement polarisée, ce qui est notamment utilisé en photographie pour obtenir des cieux plus profonds et plus contrastés (figure 2).

Figure 2 – Photographies d'un nuage avec un filtre polarisant orienté dans deux directions différentes, tous les autres paramètres d'exposition étant identiques.

L'énoncé est divisé en une partie introductive d'analyse dimensionnelle, une deuxième partie assez calculatoire sur les dipôles électriques (sections 2 et 3), qui permet de poser les bases théoriques nécessaires, et une troisième partie plus physique, dans laquelle les questions évoquées précédemment seront étudiées (sections 4 et 5).

## 1 Préliminaire : analyse dimensionnelle

La réponse à la question de la couleur du ciel a été apportée par Lord Rayleigh, dans un article datant de 1871 [1]. À l'époque, on venait de découvrir la nature de la lumière, et on pensait que c'était une onde transverse se propageant dans un milieu matériel, à l'image des vibrations se propageant à la surface libre d'un liquide.

Cependant, Rayleigh use d'un argument dimensionnel intéressant que nous allons retrouver ici.

Le ciel nous apparaît lumineux car il diffuse une partie de la lumière provenant du soleil. En considérant une particule de volume V de très petites dimensions devant la longueur d'onde $\lambda$, il nous faut comparer les amplitudes de la vibration incidente sur cette particule et de celle émise. On notera $i = \mathrm{E}_{\mathrm{em}}/\mathrm{E}_{\mathrm{inc}}$ ce rapport.

1. On observe la particule d'une distance $r$. En utilisant un argument de conservation de l'énergie, montrer que le rapport $i$ est inversement proportionnel à $r$.
2. D'après les expériences menées à cette époque, Rayleigh estime que $i$ doit être proportionnel au volume de la particule. Quelle hypothèse permet de justifier cette affirmation ?
3. En déduire la dépendance en $\lambda$ du spectre diffusé par la particule.

Ce résultat obtenu par analyse dimensionnel nous permet dores et déjà de connaître la distribution spectrale de la lumière diffusée par l'atmosphère. Nous allons dans la suite utiliser les concepts actuels de l'électromagnétisme pour démontrer ce résultat et l'affiner. Pour cela, nous allons étudier la modélisation de cette particule que nous venons d'étudier : le dipôle électromagnétique.

## 2 Dipôle électrostatique

Un dipôle électrique est une distribution de charges électriques globalement neutre telle que le barycentre des charges négatives ne coïncide pas avec celui des charges positives. On considèrera dans la suite que le dipôle étudié est constitué de deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$ disposées en P et N respectivement, distants de $a = \mathrm{NP}$ (voir figure 3).

Ce dipôle sera observé depuis le point M situé à une grande distance $r = \mathrm{OM} \gg a$.

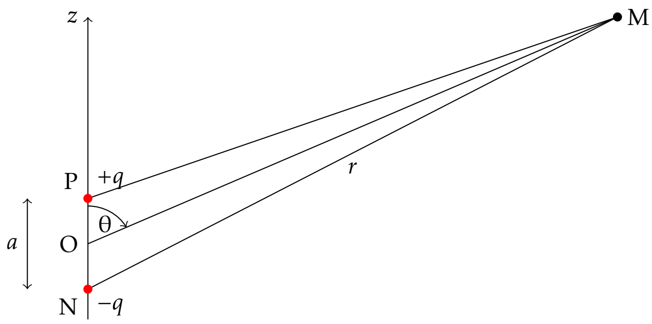


Figure 3 – Schéma de principe du dipôle électrique tel qu'étudié dans notre cas.

On commence par étudier le dipôle en régime statique, c'est à dire que $q$ et $a$ sont constants. Le vecteur $\mathbf{p} = q\mathbf{NP} = qa\mathbf{e}_z$ est appelé *moment dipolaire*.

1. Rappeler l'expression du potentiel électrique V au point M, créé par une charge unique $q$ situé en O.
2. En déduire l'expression du potentiel électrique du dipôle électrostatique en fonction de $r$, $\theta$ et $p = \|\mathbf{p}\|$. On utilisera l'approximation $r \gg a$ pour la simplifier.

---

1. « On the Light from the Sky, its Polarization and Colour, » *Phil. Mag.* XLI p. 107-120 (1871)

3. Calculer le champ électrique $\mathbf{E}$ au point M. On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi \tag{1}$$

Que vaut le champ magnétique ?

## 3 Dipôle oscillant

On généralise le concept vu précédemment en supposant que l'amplitude du moment dipolaire varie avec le temps. Grâce à la théorie de Fourier, on peut se contenter d'étudier les oscillations sinusoïdales du dipôle ; $\mathbf{p}$ pourra donc s'écrire $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \exp(\mathrm{i}\omega t)$ avec $\omega$ la pulsation de l'oscillation, et la vitesse d'une charge vaudra $\mathbf{v} = \dot{a}/2\mathbf{e}_z = \dot{\mathbf{p}}/(2q)$.

### a ) Potentiels électrique et magnétique

1. Rappeler les expressions des potentiels retardés $V(M,t)$ et $\mathbf{A}(M,t)$ sous leurs formes intégrales, puis pour un ensemble de charges ponctuelles.
2. En plus de l'approximation dipolaire, nous ferons l'hypothèse que la vitesse des charges est très petite devant la vitesse de la lumière. En considérant que $v \simeq a\omega$, comparer les valeurs de $a$ et de $\lambda$, la longueur d'onde associée à cette pulsation. Le domaine fréquentiel considéré est le domaine visible. En déduire que $t - QM/c \simeq t - r/c$ où Q est un point quelconque de la distribution de charges.
3. Déterminer l'expression de $\mathbf{A}(M,t)$ en utilisant les approximations détaillées précédemment. On l'exprimera en fonction de $\dot{\mathbf{p}}$, $r$ et $t' = t - r/c$.
4. En utilisant la jauge de Lorentz, déterminer l'expression du potentiel électrique $V(M,t)$. Pour rappel, la jauge de Lorentz s'écrit :

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

Et la relation suivante peut être utilisée :

$$\mathrm{div}(f(r)\mathbf{e}_z) = f(r)\mathrm{div}(\mathbf{e}_z) + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{grad}(f(r)) = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z \tag{3}$$

### b ) Champs électrique et magnétique

1. En déduire l'expression des champs magnétique et électrique au point M et au temps $t$, toujours en fonction des dérivées successives de $p$. On donne :

$$\mathbf{rot}\,(f(r)\mathbf{e}_z) = \mathbf{grad}\,(f(r)) \wedge \mathbf{e}_z + f(r)\mathbf{rot}(\mathbf{e}_z) = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z. \tag{4}$$

2. Comparer les ordres de grandeur de chacun des termes des champs trouvés précédemment sachant que l'on se place dans la zone de rayonnement, où $\lambda \ll r$. Simplifier leurs expressions en ne gardant que les termes prépondérants.
3. Montrer que l'onde électromagnétique est localement plane. Commenter la forme du champ électromagnétique.

### c ) Puissance rayonnée

1. Montrer que le vecteur de Poynting de l'onde électromagnétique rayonnée par le dipôle oscillant vaut :
$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mu_0\omega^4}{16\pi^2 c r^2}\sin^2(\theta)p_0^2\cos^2(\omega t - kr)\mathbf{e}_r \tag{5}$$
2. Calculer la puissance moyenne rayonnée par unité de surface à une distance $r$ du dipôle, dans la direction $\mathbf{e}_r$.
3. Que dire de la direction de rayonnement ? On tracera l'*indicatrice de rayonnement*, c'est à dire la courbe $r = \|\langle\mathbf{\Pi}(r_0,\theta)\rangle\|$ en coordonnées polaires.
4. Déterminer la puissance totale rayonnée par le dipôle à travers une sphère entourant le dipôle à une distance $r$ de celui-ci sachant que $\int_0^\pi \sin^3(\theta) = 4/3$.

## 4 Modèle de l'électron élastiquement lié

Dans ce modèle, chaque molécule d'air est considérée comme un dipôle constituée d'un électron et d'un ensemble « noyau et électrons restants ». L'ion de charge $+e$ sera considéré comme fixe et la position moyenne de l'électron sera notée $\boldsymbol{\rho}$. L'électron est soumis à une force de rappel de la forme $-m\omega_0^2\boldsymbol{\rho}$ qui tend à ramener l'électron à sa position d'équilibre, et à une force de frottements fluide $-m\Gamma\dot{\boldsymbol{\rho}}$ qui rend compte des diverses causes d'amortissement. Le rayonnement électromagnétique émis par le soleil, considéré comme une onde plane progressive, interagit également avec les électrons des molécules par le biais de la force de Lorentz.

1. En supposant que l'électron ne quitte pas son niveau énergétique et reste lié à sa molécule, donner l'ordre de grandeur de $\|\boldsymbol{\rho}\|$. Comparer cette valeur à la longueur d'onde du rayonnement solaire, et en déduire que le champ peut être localement considéré comme uniforme. On écrira donc le champ électrique local $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(\omega t)$, avec $\omega$ une pulsation comprise dans le spectre solaire.
2. Donner l'expression de la force de Lorentz appliquée à l'électron. Déduire de l'approximation de la question précédente que l'électron est non relativiste, puis que la force due au champ magnétique est négligeable.
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron.
4. Déterminer la réponse de l'électron en régime forcé à la pulsation $\omega$. En déduire l'expression du moment dipolaire induit par le rayonnement solaire.
5. Donner l'expression de la puissance moyenne rayonnée par ce dipôle en un point M très éloigné de la molécule, dans la direction $\theta$. Tracer l'allure de la courbe $\mathrm{P}(\omega)$ et caractériser les différents régimes selon l'ordre de grandeur de $\omega$.

## 5 Diffusion Rayleigh et ciel bleu

1. La transition électronique la plus basse de la molécule de diazote correspond à un gap d'énergie $\mathrm{E_A} - \mathrm{E_X} = 7{,}9\,\mathrm{eV}$ (R.T. Birge *Nature* 117, page 81 (1926)). En déduire la valeur de la pulsation de résonance $\omega_0$. Dans lequel des régimes précédemment décrit se place-t'on ? Donner l'expression de la puissance diffusée et commenter sa dépendance en $\omega$.
2. Le rayonnement du soleil est celui d'un corps noir de température $\mathrm{T} = 5750\,\mathrm{K}$ ; sa répartition est donc donnée par :
$$\mathrm{S}(\omega) = \frac{\omega^5}{e^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}\mathrm{T}} - 1} \tag{6}$$
Donner l'expression du spectre rayonné par les molécules de l'atmosphère sous l'effet du rayonnement solaire. Quelle est la longueur d'onde d'émission maximale ? On pourra s'aider

de l'abaque de la figure 4 qui représente les fonctions :

$$f(\lambda) = \frac{\gamma}{1 - e^{-\gamma/\lambda}} \tag{7}$$

$$g(\lambda) = 9\lambda \tag{8}$$

avec $\gamma = hc/k_B T$.

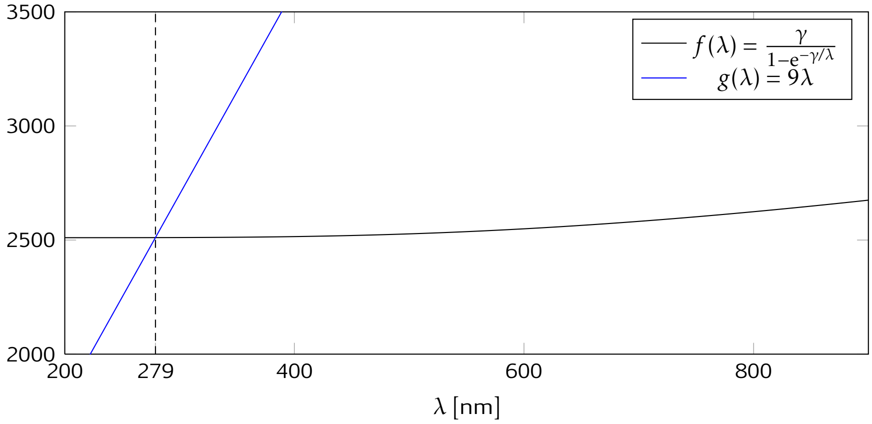


Figure 4 – Représentation de l'abaque 8

Pourquoi percevons-nous le ciel comme *bleu* ?

3. Pourquoi le soleil apparaît-il jaune en milieu de journée, et rouge lorsqu'il se lève ou se couche ?
4. Dessiner le trajet d'un faisceau lumineux émis par le soleil (S), diffusé par une molécule de l'atmosphère (M) et vu par un observateur (O). On fera apparaître l'angle $\alpha$ entre la direction OM et la direction OS, ainsi que les vecteurs de base des différentes polarisations possibles pour les ondes lumineuses. Quelle sont les polarisations perçues par l'observateur, et dans quelles proportions, a exprimer en fonction de $\alpha$ ?