

Optique – Contrôle continu 2 Diffraction – Descartes

Corrections

1 Diffraction par une ouverture rectangulaire (8 points)

On considère une ouverture plane rectangulaire de largeur a et de hauteur b , comme représenté en figure 1. On éclaire cette fente par une source monochromatique de longueur d'onde λ et selon la direction \vec{u}_0 , vecteur unitaire dont les coordonnées sont $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. On observe la figure de diffraction dans une direction quelconque, définie par le vecteur unitaire \vec{u} de coordonnées (α, β, γ) .

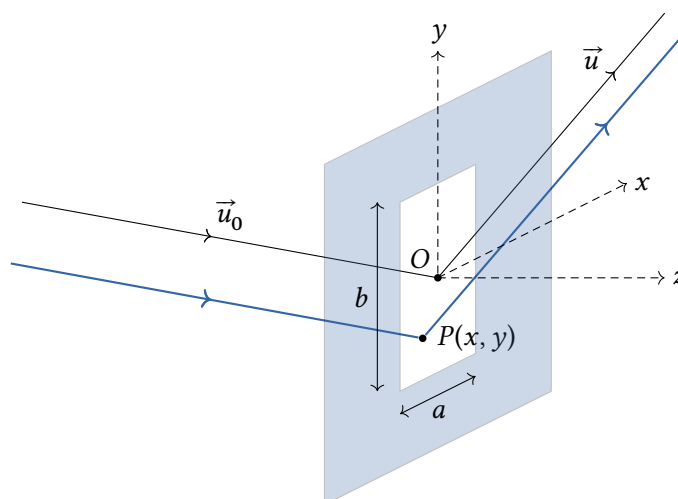


FIGURE 1 – Diffraction par une ouverture rectangulaire. L'onde incidente arrive selon le vecteur \vec{u}_0 , et on observe la figure de diffraction dans la direction \vec{u} .

1 - 1

- Chaque petit élément de surface de l'ouverture agit comme une source secondaire émettant une ondelette sphérique.
- Ces sources secondaires sont cohérentes entre elles.

1 - 2

$$\Psi = K\Psi_0 \iint_{\Sigma} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP}/\lambda\right) d\sigma(P) \quad (1.0.1)$$

1 - 3

$$(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \vec{OP} = (\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y$$

1 - 4

$$\begin{aligned}
 \Psi &= K\Psi_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u} - \vec{u}_0) \cdot \overrightarrow{OP}\right) dx dy = K\Psi_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]\right) dx dy \\
 &= K\Psi_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)x\right) dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)y\right) dy \\
 &= K\Psi_0 \left[\frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)x\right)}{i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)y\right)}{i\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\
 &= K\Psi_0 \left[\frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)\frac{a}{2}\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)\frac{a}{2}\right)}{i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)} \right] \left[\frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)\frac{b}{2}\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)\frac{b}{2}\right)}{i\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)} \right] \\
 &= K\Psi_0 \frac{2i \sin\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)\frac{a}{2}\right)}{i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)} \frac{2i \sin\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)\frac{b}{2}\right)}{i\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)} = K\Psi_0 ab \operatorname{sinc}\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)\frac{a}{2}\right] \operatorname{sinc}\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)\frac{b}{2}\right]
 \end{aligned}$$

1 - 5

$$I = K^2\Psi_0^2 a^2 b^2 \operatorname{sinc}\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)\frac{a}{2}\right]^2 \operatorname{sinc}\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)\frac{b}{2}\right]^2$$

1 - 6 L'intensité lumineuse s'annule pour la première fois quand $\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)\frac{a}{2} = \pi$:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{\lambda}{a} \quad \beta - \beta_0 = \frac{\lambda}{b}$$

2 Transparence complexe sinusoïdale (6 points)

On considère une fente infinie dans la direction y et de largeur a dans la direction x . Cette fente est recouverte par une lame plus ou moins absorbante dont la transparence varie avec x selon la loi :

$$t(x) = \cos(\pi x/a) \quad (2.0.1)$$

On éclaire cette fente par une source de longueur d'onde λ , localisée à l'infini, incidente avec un angle d'incidence nul. On observe la figure de diffraction de cette fente dans une direction $\vec{u}(\alpha, \gamma)$ quelconque du plan (Oxz) .

2 - 1

$$\Psi = K\Psi_0 \iint_{\Sigma} t(x) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u} \cdot \overrightarrow{OP}\right) d\sigma$$

2 - 2

$$\begin{aligned}
 \Psi &= K\Psi_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos(\pi x/a) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x\right) dx \\
 &= \frac{K\Psi_0}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\exp(i\pi x/a) + \exp(-i\pi x/a) \right) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\alpha x\right) dx \\
 &= \frac{K\Psi_0}{2} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(i\frac{\pi x}{a} \left(1 + \frac{2\alpha a}{\lambda}\right)\right) dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(i\frac{\pi x}{a} \left(\frac{2\alpha a}{\lambda} - 1\right)\right) dx \right) \\
 &= \frac{K\Psi_0}{2} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(i\frac{\pi x}{a} (1 + 2\nu)\right) dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(i\frac{\pi x}{a} (2\nu - 1)\right) dx \right) \\
 &= \frac{K\Psi_0}{2} \left(\left[\frac{\exp\left(i\frac{\pi x}{a} (1 + 2\nu)\right)}{i\pi(1 + 2\nu)/a} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} + \left[\frac{\exp\left(i\frac{\pi x}{a} (2\nu - 1)\right)}{i\pi(2\nu - 1)/a} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \right) \\
 &= \frac{K\Psi_0}{2} \left(\left[\frac{\exp\left(i\frac{\pi}{2} (1 + 2\nu)\right) - \exp\left(-i\frac{\pi}{2} (1 + 2\nu)\right)}{i\pi(1 + 2\nu)/a} \right] + \left[\frac{\exp\left(i\frac{\pi}{2} (2\nu - 1)\right) - \exp\left(-i\frac{\pi}{2} (2\nu - 1)\right)}{i\pi(2\nu - 1)/a} \right] \right) \\
 &= \frac{K\Psi_0}{2} \left(\left[\frac{2i \sin\left(\frac{\pi}{2} (1 + 2\nu)\right)}{i\pi(1 + 2\nu)/a} \right] + \left[\frac{2i \sin\left(\frac{\pi}{2} (2\nu - 1)\right)}{i\pi(2\nu - 1)/a} \right] \right) \\
 &= \frac{2K\Psi_0 a}{\pi} \cos(\pi\nu) \left(\frac{1}{1 + 2\nu} - \frac{1}{2\nu - 1} \right)
 \end{aligned}$$

2 - 3

$$\Psi = \frac{2K\Psi_0 a}{\pi} \cos(\pi\nu) \left(\frac{2\nu - 1 - 2\nu - 1}{(1 + 2\nu)(2\nu - 1)} \right) = \frac{-4K\Psi_0 a}{\pi} \frac{\cos(\pi\nu)}{(1 + 2\nu)(2\nu - 1)}$$

soit :

$$C = \frac{-4K\Psi_0 a}{\pi} \quad X = \nu \quad f(\nu) = (1 + 2\nu)(2\nu - 1)$$

L'intensité I s'écrit donc :

$$I(\nu) = \frac{16K^2\Psi_0^2 a^2}{\pi^2} \frac{\cos^2(\pi\nu)}{(1 + 2\nu)^2(2\nu - 1)^2}$$

2 - 4 $I(\nu)$ s'annule pour le deuxième zéro de la fonction cosinus, soit pour $\nu = 3/2$. La tache de diffraction est donc de $\Delta\nu = 3$, soit $\alpha = 3\lambda/a$.

3 Résolution d'un télescope (4 points)

L'étoile polaire est en réalité constituée d'un système de deux étoiles : Alpha Ursae Minoris Aa et Alpha Ursae Minoris Ab. Ces deux étoiles sont séparées d'une distance de 18,8 unités astronomiques, et sont situées à une distance de $2,72 \times 10^7$ ua (soit 430 années lumières) du système solaire.

3 - 1 La résolution d'un télescope de rayon R est donnée par la tache de diffraction que son ouverture circulaire produit, soit un angle de :

$$\theta = \frac{0,61\lambda}{R}$$

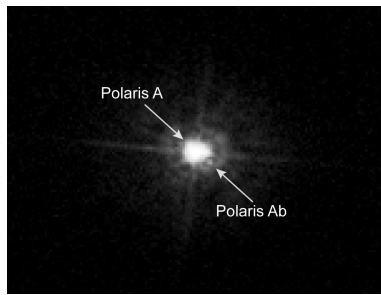


FIGURE 2 – Image prise par le télescope Hubble de l'étoile polaire, montrant les deux étoiles qui composent le système binaire : α Ursae Minoris Aa et α Ursae Minoris Ab (en anglais : Polaris Aa et Polaris Ab).

Pour pouvoir distinguer les deux étoiles, il faut que cet angle θ soit inférieur à l'angle sous lequel est observé les deux étoiles. Cet angle α vaut :

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{18,8}{2,72 \times 10^7}$$

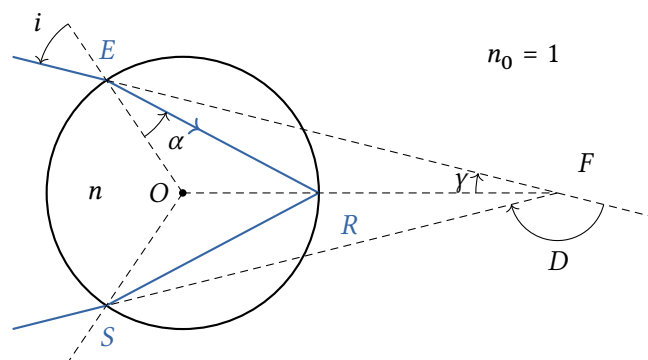
Pour le rayon minimal, on aura donc :

$$\alpha = \frac{0,61\lambda}{R_{\min}}$$

ce qui donne $R_{\min} = 19,4$ cm. Le télescope de Hubble résout difficilement les deux étoiles, car elles n'ont pas la même intensité : l'une d'elle est nettement plus intense et apparaît plus grosse.

4 Arc-en-ciel (9 points)

Un rayon lumineux entre en E dans une goutte d'eau (indice n) sphérique avec une incidence i . On considère que le rayon, une fois dans la goutte va subir une réflexion au point R , et repartira donc au point S pour sortir de la goutte d'eau.



4 - 1

1. Le triangle OER est isocèle car O est le centre de la goutte. Les angles E et R sont donc égaux et valent α . L'angle en O vaut donc $\pi - 2\alpha$.
2. Dans le triangle OEF , $\pi = \gamma + (\pi - 2\alpha) + i$, soit $\gamma = 2\alpha - i$. D'où $D = \pi - 2\gamma = \pi - 4\alpha + 2i$.
3. En appliquant la loi de Descartes au dioptre air-eau en E , on a $\sin i = n \sin \alpha$, et donc :

$$D = \pi + 2i - 4 \operatorname{asin}(\sin(i)/n)$$

4 - 2 Le graphique montre qu'on obtient une concentration de rayons réfléchis plus importante proche de la déviation minimale.

$$\frac{dD}{di} = 2 - \frac{4}{\sqrt{1 - \sin^2(i)/n^2}} \cos(i)/n = 0$$

$$\frac{2 \cos(i)/n}{\sqrt{1 - \sin^2(i)/n^2}} = 1$$

$$2 \cos(i) = n\sqrt{1 - \sin^2(i)/n^2}$$

$$4 \cos^2(i) = n^2 - \sin^2(i)$$

$$3 \cos^2(i) = n^2 - 1$$

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$$

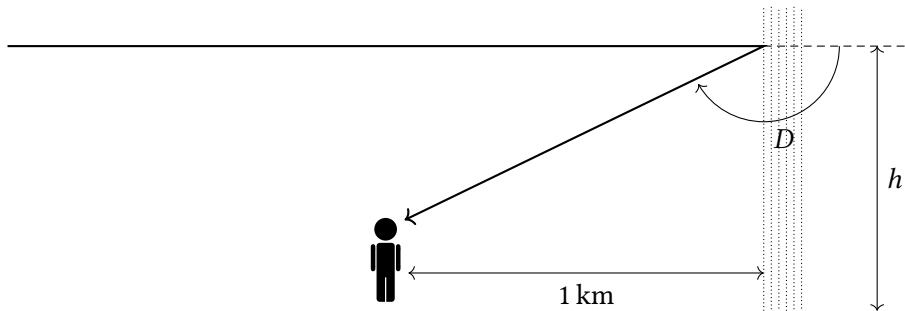
4 - 3 La propriété de dépendance de l'indice avec la longueur d'onde s'appelle la dispersion chromatique.

| Couleur | Rouge | Vert | Indigo |
|---------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Indice | 1,329 | 1,335 | 1,339 |
| i_0 | 1,041 rad = 59,65° | 1,0349 rad = 59,3° | 1,0308 rad = 59,06° |
| D_0 | 2,3970 rad = 137,34° | 2,4123 rad = 138,21° | 2,4223 rad = 138,79° |

Ainsi, l'intensité lumineuse réfléchie maximale est obtenue pour des angles de déviations différents, semblant venir de direction légèrement différentes, produisant un effet coloré.

Le soleil éclaire un mur de gouttes d'eau avec une incidence horizontale, et un observateur placé 1 km en avant du rideau de pluie observe la réflexion étudiée dans les questions précédentes.

4 - 4



$$\tan(\pi - D) = \frac{h}{1 \text{ km}}$$

Ce qui donne pour les 3 couleurs considérées :

| Couleur | Rouge | Vert | Indigo |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Indice | 1,329 | 1,335 | 1,339 |
| i_0 | 1,041 rad = 59,65° | 1,0349 rad = 59,3° | 1,0308 rad = 59,06° |
| D_0 | 2,3970 rad = 137,34° | 2,4123 rad = 138,21° | 2,4223 rad = 138,79° |
| Altitude | 921 m | 894 m | 876 m |

Le rouge semble ainsi venir de plus haut dans le ciel que le vert et le bleu, conformément à l'expérience.