

Exercice 1 : Cohérence temporelle et interféromètre de Michelson

1 L'interféromètre de Michelson en lame d'air

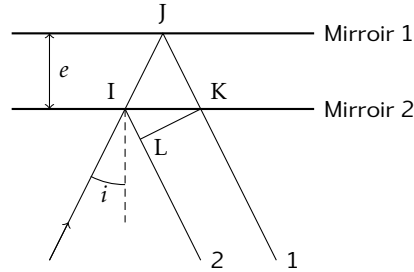


Figure 1 – Schéma du Michelson utilisé en lame d'air.

1. Le schéma est représenté en figure 1. Les interférences se produiront là où les deux rayons se croisent, c'est à dire à l'infini.
2. La différence de marche entre les deux rayons provient de la différence de distance entre IJK et IL. Pour le rayon 1, on a $IJ = JK = e / \cos i$. Pour le rayon 2, $\sin i = IL / IK = IL / (2e \tan i)$. D'où :

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{2e}{\cos i} - 2e \sin i \tan i = 2e \frac{1 - \sin^2 i}{\cos i} = 2e \cos i \quad (1)$$

Le champ électrique à l'infini vaut la somme des champs issues des deux rayons :

$$E = \sqrt{\frac{I_0}{2}} e^{i \frac{2\pi\delta_1}{\lambda}} + \sqrt{\frac{I_0}{2}} e^{-i \frac{2\pi\delta_2}{\lambda}} \quad (2)$$

d'où, en multipliant par le complexe conjugué :

$$I = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} 2e \cos i \right) \right] \quad (3)$$

Pour un angle d'incidence i constant, le déphasage est constant, et l'intensité aussi ; les franges seront donc des cercles ($i = \text{Cte}$) concentriques. On parle d'anneaux d'égal inclinaison.

2 Cohérence et Interférences

a) Interférences et polychromatisme

1. Au centre de la figure d'interférences, on a $i = 0$, donc $I = I_0 [1 + \cos(4\pi e / \lambda)]$. La pulsation ω est reliée à la longueur d'onde par $\omega = 2\pi c / \lambda$, d'où l'argument du cosinus peut s'écrire :

$$\varphi = \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{2e}{c} = \omega \tau \quad (4)$$

avec $\tau = 2e/c$ correspondant bien à un temps. Il s'agit du temps de retard du faisceau 2 par rapport au faisceau 1. Au final, on a $I(\tau) = I_0 [1 + \cos(\omega \tau)]$.

2. La formule précédente était valable pour une seule longueur d'onde ; pour passer à l'intervalle entre ω et $\omega + d\omega$, il suffit d'écrire $dI = I_0 S(\omega) [1 + \cos(\omega \tau)] d\omega$. Ainsi, on obtient l'intensité sur tout le spectre en intégrant sur les pulsations :

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0 S(\omega) [1 + \cos(\omega \tau)] d\omega \quad (5)$$

b) Cohérence et spectrométrie de Fourier

1. On remarque que la formule précédente fait intervenir un cosinus, qui correspond à la partie réelle d'une exponentielle complexe. On peut donc écrire :

$$I(\tau) = \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} I_0 S(\omega) [1 + e^{i\omega\tau}] d\omega \right] \quad (6)$$

$$= I_0 \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right] \quad (7)$$

$$= I_0 \Re [Cte + TF^{-1}(S(\omega))] \quad (8)$$

2. Dans la formule 8, on reconnaît immédiatement la définition de la fonction de corrélation temporelle $G(\tau) = TF^{-1}(S(\omega))$. On a donc :

$$I(\tau) = I_0 \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega + G(\tau) \right] \quad (9)$$

$$= I_0 \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega 0} S(\omega) d\omega + G(\tau) \right] \quad (10)$$

$$= I_0 \Re [G(0) + G(\tau)] \quad (11)$$

$$= I_0 G(0) \Re [1 + g(\tau)] \quad (12)$$

La figure d'interférence observée lorsque l'on fait défiler les anneaux (on varie e donc τ) est donc directement liée à la fonction de corrélation temporelle de l'onde. On a donc directement accès à des données sur le champ électromagnétique qui varie à des fréquences de l'ordre de 10^{15} Hz. C'est en cela que réside la puissance de l'étude interférométrique.

3 Applications

a) Laser monochromatique

1. Pour un rayonnement strictement monochromatique (et une polarisation rectiligne), le champ électrique vaut $E = E_0 e^{i\omega_0 t}$.
2. Pour un champ aussi simple, on part de la définition de la corrélation temporelle :

$$G(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E^*(t) E(t + \tau) dt \quad (13)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0(t+\tau)} dt \quad (14)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\omega_0 \tau} dt \quad (15)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{i\omega_0 \tau}}{2T} \int_{-T}^T dt \quad (16)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{i\omega_0 \tau}}{2T} 2T \quad (17)$$

$$= e^{i\omega_0 \tau} \quad (18)$$

3. La forme des interférences est donnée par l'expression 12 :

$$I(\tau) = I_0 \Re [1 + e^{i\omega_0 \tau}] = I_0 [1 + \cos(\omega_0 \tau)] \quad (19)$$

La figure d'interférence est donc un simple cosinus.

4. Le temps de cohérence est défini par :

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 d\tau = \infty \quad (20)$$

Le laser parfait a donc un temps de cohérence infini. La phase de cette onde théorique est donc tout le temps connue.

b) Lampes spectrales

1. L'énergie d'une molécule de gaz correspond en première approximation à son énergie cinétique $E = \frac{1}{2}mv^2$ où m est sa masse et v sa vitesse. La probabilité de trouver une molécule à la vitesse v vaut donc :

$$P(v) = P_0 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (21)$$

2. La relation de Doppler donne $v = c(v/v_0 - 1)$. Il ne reste qu'à remplacer dans l'expression de la probabilité des vitesses :

$$P(v) = e^{-\frac{mc^2(v-v_0)^2}{2k_B T v_0^2}} \quad (22)$$

On trouve donc bien la formule proposée en énoncé :

$$P(\omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2}} \text{ avec } \sigma = \omega_0 \sqrt{\frac{k_B T}{mc^2}} \quad (23)$$

Bien sur, cette loi de probabilité est égale au spectre quand il y'a suffisamment de molécules émettrices, ce qui est le cas pour les lampes spectrales que l'on utilise.

3. La masse d'une molécule étant $m = M/\mathcal{A}$, on a $\sigma = \omega_0 \cdot 1,41 \times 10^{-6}$. De la même manière, la dimension caractéristique en longueur d'onde vaut $\sigma_\lambda = \lambda_0 \cdot 1,41 \times 10^{-6} = 8,3 \times 10^{-4}$ nm. La largeur à mi-hauteur vaut donc $\Delta\lambda = 2 \ln 2 \sigma_\lambda = 1,15$ pm.

4. Pour cela, on part de $I(\tau) = I_0 \Re\{1 + \text{TF}^{-1}(S(\omega))\}$ et de la formule qu'on vient de trouver. On calcule par étapes la valeur de la transformée de Fourier :

$$\text{TF}^{-1}(S(\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2} + i\omega\tau} d\omega \quad (24)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0 - i2\omega\sigma^2\tau)} d\omega \quad (25)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(\omega - (\omega_0 + i\sigma^2\tau))^2 - \sigma^2\tau(i2\omega_0 - \sigma^2\tau)]} d\omega \quad (26)$$

$$= e^{-\tau\left(\frac{\sigma^2\tau}{2} - i\omega_0\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\omega-\omega_1)^2}{2\sigma^2}} d\omega \quad \omega_1 = \omega_0 + i\sigma^2\tau \quad (27)$$

$$= \sigma\sqrt{2\pi} e^{-\tau\left(\frac{\sigma^2\tau}{2} - i\omega_0\right)} \quad (28)$$

On peut donc injecter dans l'équation 8 :

$$I(\tau) = I_0 \Re\left[1 + \sigma\sqrt{2\pi} e^{-\tau\left(\frac{\sigma^2\tau}{2} - i\omega_0\right)}\right] \quad (29)$$

$$= I_0 \left(1 + \cos(\omega_0\tau) e^{-\frac{\sigma^2\tau^2}{2}}\right) \quad (30)$$

La figure d'interférence est donc composée d'une partie sinusoïdale de pulsation ω_0 multipliée par une gaussienne de largeur $1/\sigma$. On peut donc parler de franges d'interférence associées à un facteur de visibilité de forme gaussienne. En effet, le spectre correspond à la convolution d'un pic de Dirac centré en ω_0 et une gaussienne de largeur σ : $S(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) * \exp(-\omega^2/2\sigma^2)$ (voir la figure 8 pour plus de détail sur les signaux optiques et leurs transformées de Fourier). La transformée de Fourier de S est donc le produit des transformées de Fourier des deux composantes.

c) Doublet du sodium

1. On modélise le doublet du sodium par deux gaussiennes de largeurs identiques σ et séparées $\Delta\omega$. On peut donc écrire :

$$S(\omega) = e^{\omega^2/2\sigma^2} * [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)] \quad (31)$$

2. D'après ce que l'on a vu précédemment, on peut calculer simplement la transformée de Fourier de $S(\omega)$:

$$\text{TF}^{-1}(S(\omega)) = \text{TF}^{-1}(e^{\omega^2/2\sigma^2} * [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)]) \quad (32)$$

$$= \text{TF}^{-1}(e^{\omega^2/2\sigma^2})[\text{TF}^{-1}(\delta(\omega - \omega_0)) + \text{TF}^{-1}(\delta(\omega - \omega_0 - \Delta\omega))] \quad (33)$$

$$= e^{-\frac{\sigma^2\tau^2}{2}} [\cos(\omega_0\tau) + \cos((\omega_0 + \Delta\omega)\tau)] \quad (34)$$

$$= 2e^{-\frac{\sigma^2\tau^2}{2}} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right) \cos(\omega_0\tau) \quad (35)$$

La figure d'interférence attendue est donc constituée d'une oscillation rapide à la fréquence ω_0 modulée par une gaussienne de largeur $1/\sigma$ et une sinusoïde de fréquence (lente) $\Delta\omega/2$. Ainsi, chaque fois que $\Delta\omega\tau = \pi/2 + k\pi$, le contraste des franges s'annule. En déterminant la distance de chariotage entre deux brouillages, on a donc accès à la valeur de $\Delta\omega$ par la relation :

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{\Delta\tau} = \frac{\pi c}{2\Delta e} \quad (36)$$

3. En prenant $\Delta e = 0,175 \text{ mm}$, on trouve $\Delta\omega = 2,7 \times 10^{12} \text{ Hz}$. En longueur d'onde, cela donne :

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi c \Delta\lambda}{\lambda^2} \quad (37)$$

ce qui donne $\Delta\lambda = 0,5 \text{ nm}$.

Exercice 2 : Mesure de diamètres apparents par interférométrie

1 Fentes d'Young

1. Une simple application de Pythagore nous donne :

$$l_1 = \sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} \quad l_2 \simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - x\right)^2\right) \quad (38)$$

$$\simeq D \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + x\right)^2\right) \quad (39)$$

La différence des marche étant la soustraction de ces deux chemins optiques, on a $\delta = l_1 - l_2 = ax/D$. L'intensité sur l'écran vaut donc $I = I_0[1 + \cos(2\pi ax/(\lambda D))]$.

2. Par les formules trigonométriques, il vient $T_1 H = a \sin \theta \simeq a\theta$ avec $\theta \ll \pi$.
3. Les différences de marche s'ajoutant, on a $I(\theta) = I_0[1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda} a(\frac{x}{D} + \theta))]$.

2 Théorème de Van Cittert-Zernike

1. D'après l'expression précédemment trouvée, et pour un portion d'angle infinitésimale, $dI = I_S(\theta)[1 + \cos(\frac{2\pi}{\lambda}a(\frac{x}{D} + \theta))]d\theta$. En sommant cette expression sur tous les angles, on trouve :

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_S(\theta) \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}a\left(\frac{x}{D} + \theta\right)\right) \right] d\theta \quad (40)$$

2. En remarquant que le cosinus est la partie réelle d'une exponentielle :

$$I(x) = \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} I_S(\theta) \left[1 + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}a\left(\frac{x}{D} + \theta\right)} \right] d\theta \right] \quad (41)$$

$$= \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} I_S(\theta) d\theta + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}} \int_{-\infty}^{+\infty} I_S(\theta) e^{i\frac{2\pi a\theta}{\lambda}} d\theta \right] \quad (42)$$

$$= \text{Cte} + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)V(a) \quad (43)$$

Le terme de visibilité $V(a)$, qui ne dépend que de a (et de la longueur d'onde) prend la forme d'une transformée de Fourier entre les angles d'incidences (θ) et les longueurs inter fentes (a); c'est donc une transformée de Fourier spatiale.

3 Applications

1. On calcule le terme de visibilité $V(a)$ pour $I_S(\theta) = I_0$ entre $-\theta_S$ et θ_S et nulle ailleurs :

$$V(a) = \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} I_S(\theta) e^{i\frac{2\pi a\theta}{\lambda}} d\theta \right] \quad (44)$$

$$= I_0 \Re \left[\int_{-\theta_S}^{+\theta_S} e^{i\frac{2\pi a\theta}{\lambda}} d\theta \right] \quad (45)$$

$$= I_0 \Re \left[-i\frac{\lambda}{2\pi a} e^{i\frac{2\pi a\theta}{\lambda}} \right]_{-\theta_S}^{+\theta_S} \quad (46)$$

$$= \Re \left[-\frac{I_0 i \lambda}{2\pi a} \left(e^{i\frac{2\pi a\theta_S}{\lambda}} - e^{-i\frac{2\pi a\theta_S}{\lambda}} \right) \right] \quad (47)$$

$$= \Re \left[-\frac{I_0 i \lambda}{2\pi a} 2i \sin\left(\frac{2\pi a\theta_S}{\lambda}\right) \right] \quad (48)$$

$$= 2I_0 \theta_S \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi a\theta_S}{\lambda}\right) \quad (49)$$

La fonction sinus cardinal est positive entre $-\pi$ et π , puis change de signe tous les π de chaque coté (voir figure 2). Ces changements de signes correspondent à une inversion du contraste de franges d'interférence : une frange noire devient brillante et inversement.

2. Le premier brouillage à lieu pour $2\pi a\theta_S/\lambda = \pi$, d'où $\alpha = 2\theta_S = \lambda/a$ où α est le diamètre apparent (θ_S étant le rayon, d'après nos définitions). Avec les valeurs données, on trouve $\alpha = 1,95 \times 10^{-6}$ rad pour le diamètre apparent d'Europe. En négligeant, ou plutôt en moyennant le mouvement de la Terre par rapport au Soleil, on assimile la distance entre l'observateur et le satellite à la distance Soleil-Jupiter. Le diamètre d'Europe vaut donc $D = \alpha L = 1563$ km.
3. Le premier brouillage des franges arrive pour $a = \lambda/\alpha$. En prenant $\alpha = 30$ mas, on trouve $a = 3,44$ m. Il faut donc un très gros télescope pour pouvoir mesurer le diamètre des étoiles. Quelques télescopes de ce genre existent, le plus grand mesurant un peu plus de 10m, mais pour déterminer le diamètre apparent d'étoiles plus petites, cela ne suffit pas. On utilise alors deux ou plusieurs télescopes dont on fait interférer les faisceaux lumineux. Ainsi, la distance séparant les deux « trous » est celle entre les deux miroirs, et on peut obtenir des a de quelques centaines de mètres. On parle de *synthèse d'ouverture*.

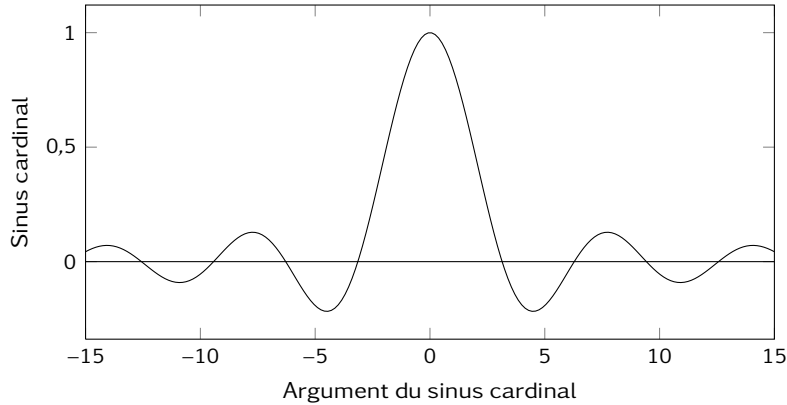


Figure 2 – Fonction sinus cardinal

Exercice 3 : Faisceaux laser

1 Couplage d'un laser dans une fibre optique

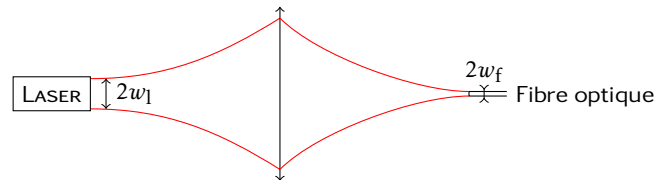


Figure 3 – Schéma de l'expérience.

1. Le schéma est représenté en figure 3, la lumière se propageant de la gauche vers la droite.
2. On s'intéresse d'abord au faisceau issu du laser. Le diamètre de mode vaut $2w_1 = 2\text{ mm}$, donc la longueur de Rayleigh vaut :

$$z_1 = \frac{w_1^2 \pi}{\lambda} = 4,96\text{ m} \quad (50)$$

Commentaire : cette valeur représente la longueur nécessaire pour que l'effet d'élargissement du faisceau dû à la diffraction soit significatif. Elle est à comparer à la fois aux valeurs données dans le problème, notamment le diamètre de mode, et aux longueurs qui sont réalistes dans le cadre de l'expérience proposée. En TP, on ne travaillera jamais sur des longueurs aussi grandes. Typiquement, la distance entre le laser et la lentille sera de quelques dizaines de cm. On est donc très en dessous de la longueur de Rayleigh, et on pourra dire que le faisceau est quasiment parallèle.

3. Le laser doit rentrer dans la fibre ; le faisceau gaussien arrivant sur la fibre doit donc avoir la même extension que celui se propageant dans la fibre. Le *waist* du faisceau gaussien après la lentille sera donc celui du mode de la fibre, c.-à-d. $2w_f = 4,3\ \mu\text{m}$ (« f » pour fibre). L'angle de convergence du faisceau est donc $\theta_f = \frac{\lambda}{\pi w_f} = 9,4 \times 10^{-2}\text{ rad}$.
4. D'abord, la lentille doit être convergente pour ramener les rayons à l'infini du faisceau issu du laser dans la fibre, de diamètre modal inférieur.

La partie la plus fine d'un faisceau, l'endroit où $w(z) = w_0$, est aussi le point d'intersection des asymptotes de $w(z)$. D'autre part, le faisceau arrivant de l'infini sur la lentille, ses rayons vont

converger sur le point focale de la lentille, d'après l'optique géométrique. C'est donc en ce point qu'il convient de placer l'entrée de la fibre. On peut donc dessiner la « version optique géométrique » de l'expérience :

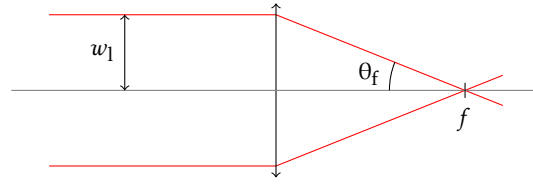


Figure 4 – Schéma de l'expérience, les rayons lumineux étant construits selon les lois de l'optique géométrique.

D'après la construction, la relation liant f aux données du problème est donc :

$$\tan \theta_f = \frac{w_1}{f} \quad (51)$$

Comme θ_f est très faible devant 2π , on prend le 1^{er} ordre du développement de Taylor de la tangente, et on a :

$$f = \frac{w_1}{\theta_f} = \frac{1 \times 10^{-3} \text{ m}}{9,4 \times 10^{-2}} = 10,6 \text{ mm} \quad (52)$$

Il faut donc utiliser une lentille convergente de longueur focale égale à 10,6 mm et de diamètre au moins égal à celui du diamètre de mode du faisceau incident, c'est à dire au moins 2 mm. L'entrée de la fibre doit être placée au point focale de cette lentille.

- La profondeur de champ est la distance autour du point de plus faible *waist* où le diamètre de mode peut être considéré comme variant peu. Par définition, elle vaut $2z_R$. Bien sur, la longueur de Rayleigh dont on parle ici est celle du faisceau gaussien de la fibre optique, donc de rayon de mode $w_f = 4,3 \mu\text{m}/2$. La profondeur de champ vaut donc :

$$2z_R = 2 \frac{w_f^2 \pi}{\lambda} = 45 \mu\text{m} \quad (53)$$

La précision requise dans l'axe de propagation du faisceau est donc de l'ordre de quelques dizaines de microns. Bien sur, dans les deux directions perpendiculaires, la précision est de l'ordre du micron, et requiert donc un matériel adapté.

2 Quel diamètre de miroir choisir pour réfléchir un faisceau laser ?

- La question demande d'exprimer la fraction de la puissance réfléchiée par un miroir de diamètre d . Il est bien sur entendu que l'on comparera cette puissance à celle du faisceau incident. Ainsi, on souhaite déterminer :

$$\eta = \frac{P_{\text{ref}}}{P_{\text{tot}}} \quad (54)$$

où P_{ref} est la puissance réfléchiée par le miroir de diamètre d , et P_{tot} est la puissance totale.

Dimensionnellement, une puissance est une intensité multipliée par une surface, et plus exactement, $P = \iint_S I dS$, avec S la surface sur laquelle la puissance est calculée ; dans notre cas, S correspond à la surface du miroir. Le problème étant à symétrie cylindrique, on passe en coordonnées polaires pour faire l'intégrale. L'intégrale s'écrit donc :

$$P_{\text{ref}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} I(r) r dr d\phi \quad (55)$$

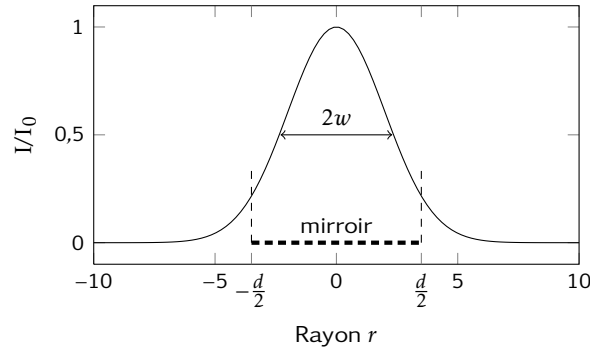


Figure 5 – Variation de l'intensité en fonction de la distance au centre du faisceau. Un miroir de diamètre d est représenté.

Pour l'établissement de la surface infinitésimale $dS = r dr d\phi$, on pourra regarder en annexe. Ici $I(r)$ est la forme gaussienne et ne dépend pas de ϕ . On peut donc séparer l'intégrale selon les angles de celle dépendant du rayon. La première est triviale, et l'intégrale selon r est une intégrale *simple*, ne nécessitant pas d'intégration par partie ou de changement de variable complexe. On a donc :

$$P_{\text{ref}} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{d}{2}} I_0 r e^{-\frac{2r^2}{w^2}} dr \quad (56)$$

$$= I_0 [\phi]_0^{2\pi} \left[-\frac{w^2}{4} e^{-\frac{2r^2}{w^2}} \right]_0^{\frac{d}{2}} \quad (57)$$

$$= I_0 2\pi \left(-\frac{w^2}{4} \right) \left(1 - e^{-\frac{d^2}{2w^2}} \right) \quad (58)$$

Le calcul de P_{tot} se fait en faisant tendre le diamètre du miroir d vers l'infini, et on obtient $P_{\text{tot}} = I_0 2\pi (-w^2/4)$. Au final, on trouve donc :

$$\eta = \frac{P_{\text{ref}}}{P_{\text{tot}}} = 1 - e^{-\frac{d^2}{2w^2}} \quad (59)$$

- On applique ce que l'on vient de calculer pour déterminer le rapport d/w nécessaire pour réfléchir 99% de la lumière.

$$1 - e^{-\frac{d^2}{2w^2}} = 0,99 \quad (60)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{d^2}{2w^2}} = 0,01 \quad (61)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{w} = \sqrt{-2 \log(0,01)} = 3,03 \quad (62)$$

Le diamètre du miroir doit donc être trois fois plus grand que le rayon de mode pour pouvoir réfléchir 99% de la lumière.

Exercice 4 : Impulsions optiques dans le domaine télécom

- La période du champ électromagnétique — le cycle optique — est donnée par la relation (connue) $\lambda = cT$. À $1,55 \mu\text{m}$ on trouve donc $T = 5,2 \times 10^{-15} \text{ s}$, ce qui correspond bien à l'ordre

de grandeur attendu, de l'ordre de la femtoseconde.

Pour trouver le nombre de cycles optique par impulsions, il suffit de diviser la durée d'une impulsion par la période que l'on vient de déterminer, et on trouve $n_{\text{imp}} = 1935$ cycles optiques.

2. L'analyse de Fourier donne la relation suivante entre la largeur temporelle et la largeur spectrale :

$$\Delta f \Delta t = \frac{2 \ln 2}{\pi} \quad (63)$$

On cherche à établir une relation similaire avec la longueur d'onde. Pour cela, on sait que $f = c/\lambda$, donc, en utilisant la dérivation :

$$df = -c \frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad (64)$$

Comme on s'intéresse à une différence, on n'a pas besoin du signe, et on aura donc $\Delta f = c\Delta\lambda/\lambda^2$. En réinjectant dans l'équation 63, on obtient :

$$\Delta\lambda\Delta t = \frac{2 \ln 2 \lambda^2}{\pi c} \quad (65)$$

Pour $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ et $\Delta t = 10 \text{ ps}$, on trouve $\Delta\lambda = 0,35 \text{ nm}$.

3. La période du signal (pas de l'onde électromagnétique) est trois fois la durée de l'impulsion, c'est à dire 30 ps. Le débit est donc l'inverse de cette valeur : $D = 33 \text{ GBit}\cdot\text{s}^{-1}$.

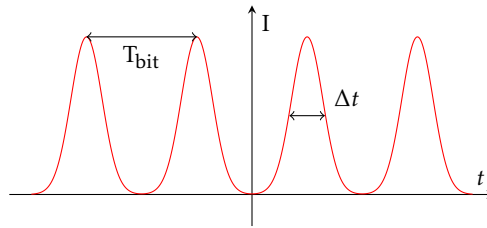


Figure 6 – Train d'impulsions utilisé pour la transmission d'informations dans le domaine des télécoms. La largeur temporelle d'une impulsion est trois fois plus faible que le temps écoulé entre deux impulsions (T_{bit}).

4. La puissance moyenne du laser étant fixée à 10mW et son taux de répétition à 33GHz, on demande de calculer l'énergie d'une impulsion et la puissance crête de chaque impulsion. Afin de simplifier la résolution, on prendra des impulsions carrées, de durée correspondant à la largeur à mi-hauteur de l'impulsion originale, c'est à dire 10 ps. On se reportera à la figure 7 pour le schéma et les notations utilisées.

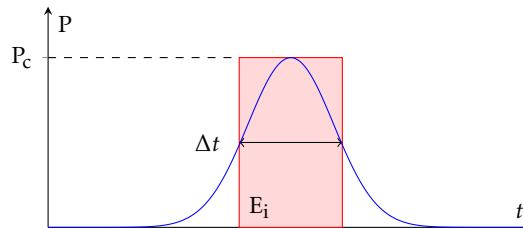


Figure 7 – Puissance crête P_c , durée Δt et énergie d'une impulsion E_i .

La définition de la puissance moyenne nous donne une première relation :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (66)$$

avec T la période du signal, c'est à dire l'inverse du taux de répétition. Comme on considère que l'impulsion est carrée, l'intégrale se simplifie :

$$P_{\text{moy}} = D \int_0^{\Delta t} P_c dt = DP_c \Delta t \quad (67)$$

On en déduit donc que $P_c = P_{\text{moy}}/(D\Delta t) = 30 \text{ mW}$. Au passage, on remarquera que la quantité $D\Delta t$ (sans unité) correspond au *rapport cyclique*, égal à $1/3$.

L'énergie de l'impulsion est obtenue simplement par l'intégrale suivante :

$$E_i = \int_0^{\Delta t} P(t) dt = P_c \Delta t = 0,3 \text{ pJ} \quad (68)$$

5. Pour calculer le nombre de photons par impulsion, il suffit de diviser l'énergie d'une impulsion par celle d'un photon. On a donc :

$$n_{\text{phot}} = \frac{E_i}{\epsilon} = \frac{E_i}{h\nu} = 2,3 \times 10^6 \text{ photons} \quad (69)$$

Ce nombre est tellement grand qu'on oublie généralement toutes les propriétés quantiques de la lumière.

A Transformée de Fourier

Un signal optique parfaitement monochromatique serait une variation sinusoïdale du champ électromagnétique $\sin(2\pi f_0 t)$ qui aurait débuté pour $t = -\infty$ et s'arrêterait à $t = +\infty$. La transformée de Fourier — le spectre de ce signal — serait alors un pic de Dirac à la fréquence f_0 (cf. Fig. 8). Pour une impulsion gaussienne, c'est à dire le même signal multiplié par une fonction gaussienne, $\sin(2\pi f_0 t) \exp(-t^2/2\tau^2)$, le spectre devient une gaussienne centrée en f_0 et de largeur à mi-hauteur Δf . En effet, la transformée de Fourier d'un produit étant une convolution, le spectre de l'impulsion gaussienne est le pic de Dirac centré en f_0 convolué par la transformée de Fourier d'une gaussienne, c'est à dire une gaussienne.

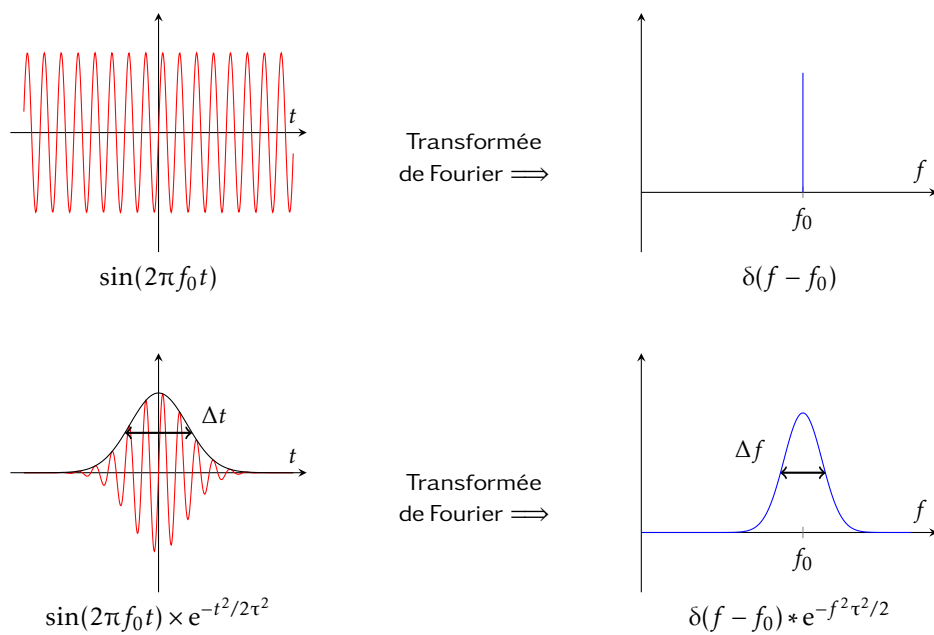


Figure 8 – Un signal optique continu à la fréquence f_0 et sa transformée de Fourier qui ne laisse apparaître qu'une seule fréquence. Lorsque une impulsion est créée à cette longueur d'onde, la transformée de Fourier est toujours centrée sur la même fréquence mais présente un certain élargissement.